

115

Библиотечка КВАНТ

ВЫПУСК

115

Библиотечка КВАНТ



Е.Я.ГИК

МАТЕМАТИКА И ШАХМАТЫ



Б Ю Р О



КВАНТУМ



БИБЛИОТЕЧКА

КВАНТ

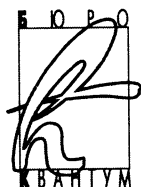
ВЫПУСК

115

Приложение к журналу
«Квант» №2/2010

Е.Я.ГИК

МАТЕМАТИКА И ШАХМАТЫ



Москва
2010

УДК 087.5:[794.1:519.1]
ББК 75.581в6+22.176
Г46

Серия
«Библиотечка «Квант»
основана в 1980 г

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, Г.С.Голицын,
Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов, С.С.Кротов, С.П.Новиков,
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Л.Стаценко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов, А.И.Черноуцан

Гик Е.Я.

Г46 Математика и шахматы – М.: Бюро Квантум, 2010. – 176 с.
(Библиотечка «Квант». Вып. 115. Приложение к журналу
«Квант» №2/2010.)

ISBN 978-5-85843-100-8

В книге рассматриваются разные виды математических задач и головоломок, связанные с шахматами. о маршрутах фигур, их расстановках и перестановках, о разрезании и покрытии шахматной доски. Исследуются игры на необычных досках по необычным правилам и с необычными фигурами

Автор книги Е.Я.Гик – математик, шахматный мастер, бессменный ведущий «Шахматной странички» журнала «Квант»

Книга предназначена для школьников, учителей математики и руководителей математических кружков, а также для всех любителей математических головоломок и шахматных задач

ББК 75 581в6+22 176

ISBN 978-5-85843-100-8

© Бюро Квантум, 2010

У математики и шахмат много точек соприкосновения, разных связей. А сам предмет совместного исследования, как бы пересечение двух этих областей деятельности, можно назвать *шахматной математикой*.

Почти в каждом сборнике олимпиадных задач, в многочисленных книгах, посвященных занимательной математике, математическим головоломкам и досугам, содержатся красивые и остроумные задачи с участием шахматной доски и фигур. Некоторые из них имеют богатую историю, привлекали внимание знаменитых математиков. Достаточно вспомнить, что *задачей о ходе коня* занимался великий Леонард Эйлер, а *задачей о восьми ферзях* – другой великий ученый Карл Гаусс. Доска, фигуры и сама игра часто используются для иллюстрации математических понятий и задач. Шахматные примеры и термины нередко встречаются и в серьезной математической литературе – по кибернетике и теории игр, теории графов, комбинаторике и др.

Автор должен признаться, что увлекся шахматной математикой, начал собирать и исследовать различные задачи и подходы еще в 1960 году, когда учился в десятом классе, т.е. ровно полвека назад. В 1970-е появился журнал «Квант», и я опубликовал в нем свои первые «Шахматно-математические заметки». А с 1980-го веду в этом журнале «Шахматную страничку», причем за тридцать лет не было ни единого пропуска! Таким образом, в 2010 году можно отмечать сразу два юбилея...

В 1983 году в серии «Библиотечка «Квант» вышла моя книга «Шахматы и математика». Перед вами новое, существенно переработанное ее издание. За четверть века архив автора разросся до внушительных размеров, так что при работе над книгой пришлось сильно ограничивать себя – учитывая объем, решать сложную задачу, что включать в книгу, а чем можно пожертвовать. Пожалуй, теперь мне удалось полностью завершить систематизацию накопленного материала, посвященного шахматной математике. Его удалось распределить на 25 разделов. При этом в одних разделах наблюдается больший крен в сторону математики, а в других, наоборот, – в сторону шахмат. В данной книге, очевидно, предпочтение отдается первому направлению. В книге, содержащей 16 глав, рассматриваются

разные виды математических задач и головоломок – о маршрутах фигур, их расстановках и перестановках на доске, о разрезании и покрытии доски. Приводятся многие шахматно-математические рекорды, обсуждается математический подход к оценке силы фигур. Исследуются шахматные игры на необычных досках, с необычными правилами и с необычными фигурами. А те темы, которые не удалось затронуть, кратко упомянуты в послесловии.

При работе над книгой автор использовал различные источники, в том числе журнал «Квант». Для того, чтобы перечислить их все, понадобилась бы еще одна книжка такого же объема. Поэтому приведенная в конце книги библиография далеко не полна. Надо сказать, что в жанре шахматной математики когда-то активно работал основатель «Задачника «Кванта» Н.Васильев. И сегодня немало сильных математиков придумывают оригинальные шахматно-математические задачи, которые включены в нашу книгу: И.Акулич, Н.Нецветаев, В.Произолов, А.Спивак, А.Ханян и др. Учтены в книге и многочисленные письма читателей, предложения и уточнения, которые в течение многих лет получал автор. Немало в книге и его собственных находок.

Е.Я.Гук

МАТЕМАТИКА ШАХМАТНОЙ ДОСКИ

В шахматной математике трудно обойтись без участия фигур. Однако доска сама по себе интересный математический объект. Прежде всего, напомним одну старинную легенду о происхождении шахмат, связанную с забавным арифметическим подсчетом.

Когда индийский царь впервые познакомился с шахматами, он был восхищен их своеобразием и обилием красивых комбинаций. Узнав, что мудрец, который изобрел игру, является его подданным, царь вознамерился наградить его за гениальную выдумку. Он пообещал выполнить любую просьбу мудреца и был удивлен его скромностью, когда тот пожелал получить в награду лишь немного пшеничных зерен. На первое поле доски он попросил положить одно зерно, на второе – два, на третье – четыре и так далее, на каждое последующее вдвое больше, чем на предыдущее. Царь приказал побыстрее выдать изобретателю шахмат его ничтожную награду. Однако на следующий день придворные математики сообщили своему повелителю, что не в состоянии исполнить желание хитроумного мудреца. Оказалось, что для этого не хватит пшеницы, хранящейся не только в амбарах царства, но и во всех амбарах мира. Мудрецу причиталось

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

зерен. Это астрономическое число записывается двадцатью цифрами, амбар для хранения такого количества зерна будет простираться от Земли до Солнца.

Конечно, связь с математикой здесь не такая уж сильная, но неожиданная развязка этой истории ил-

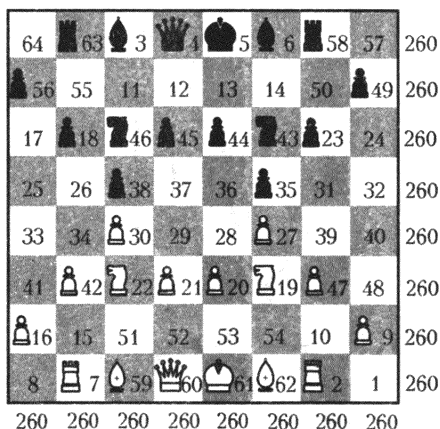


Рис.1. Альмуджannah и магический квадрат

люстрирует безграничные возможности, скрытые в шахматной игре. Вот еще одна гипотеза о происхождении шахмат, согласно которой они возникли из магических квадратов.

Магический квадрат порядка n представляет собой квадратную таблицу $n \times n$, заполненную целыми числами от 1 до n^2 и обладающую следующим свойством: сумма чисел каждой строки, каждого столбца и двух больших диагоналей одна и та же. Для магических квадратов восьмого порядка ($n = 8$) эта сумма равна 260 (на рисунке 1 магический квадрат размещен прямо на полях доски).

Рассмотрим одну из старинных дебютных табий (начальных расположений фигур) под названием альмуджаннах. Она получается из современной расстановки после таких симметричных ходов: 1. d3 d6 2. e3 e6 3. b3 b6 4. g3 g6 5. c3 c6 6. f3 f6 7. c4 c5 8. f4 f5 9. ♖c3 ♖c6 10. ♖f3 ♖f6 11. ♜b1 ♜b8 12. ♜g1 ♜g8 (см. рис.1). Подсчитав сумму чисел, стоящих на восьми полях – d2, d3, e2, e3, d7, d6, e7, e6, участвующих в первых двух ходах, мы получаем магическое число 260. Тот же результат дает и каждая последующая пара ходов. Подобные примеры и позволили высказать гипотезу о связи магических квадратов с шахматами. А исчезновение всех следов этой связи объясняется тем, что в те далекие времена суеверий и мистики древние индусы приписывали числовым сочетаниям магических квадратов таинственные свойства, и эти квадраты тщательно скрывались.

Среди математических развлечений на шахматной доске весьма популярны задачи на ее разрезание. Одна из них тоже связана с легендой.

Некий восточный властелин был таким искусным игроком, что за всю жизнь потерпел всего четыре поражения. В честь своих победителей он велел вставить в доску четыре алмаза – на

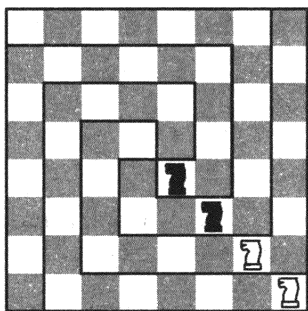


Рис.2. Легенда о четырех алмазах

те поля, где был заматован его король (на рисунке 2 на месте алмазов расположены кони).

После смерти властелина его сын, слабый игрок и жестокий деспот, решил отомстить игрокам, обыгравшим его отца. Наследник приказал им разрезать доску с алмазами на четыре одинаковые части, чтобы каждая заключала в себе по одному алмазу. Хотя они выполнили это требование, новый властелин все равно лишил их жизни.

Предлагаемая головоломка лежит в основе целого класса задач о разрезании.

На доске стоят четыре коня (см. рис. 2). Разрежьте ее на четыре одинаковые части так, чтобы на каждой оказалось по коню (разрезы проходят вдоль границ между вертикалями и горизонталями доски).

Одно из решений показано прямо на рисунке.

Располагая коней на различных полях, получаем множество подобных задач. Интересно не только нахождение конкретного разреза, но и подсчет числа всех способов разрезать доску на четыре одинаковые части, содержащие по одному коню. Установлено, что наибольшее число решений – 800 – задача имеет при конях, расположенных в четырех углах доски.

В двух следующих задачах требуется разрезать доску на самые мелкие части, т.е. на отдельные поля.

Пусть при разрезании доски образующиеся части можно прикладывать друг к другу так, чтобы следующим разрезом рассеять сразу несколько частей. Какое наименьшее число разрезов необходимо сделать, чтобы получить 64 поля?

Сначала разрежем доску пополам. Затем положим обе половины рядом и проведем второй разрез, образуя четыре одинаковые части, и т.д. Так как каждый разрез увеличивает число частей вдвое, после шестого разреза доска распадется на 64 поля ($64 = 2^6$).

Разрешим теперь каждую часть доски разрезать только в отдельности. Сколько разрезов понадобится в этом случае?

Эта задача, если она предлагается сразу после предыдущей, иногда вызывает трудности. Тут проявляется некоторая инерционность мышления. Ведь ясно, что надо сделать 63 разреза. Каждый разрез увеличивает число частей на единицу, в самом начале мы имели одну часть (саму доску), а в конце 64 (все поля доски).

До сих пор доска разрезалась по границам вертикалей и горизонталей. Но можно и отказаться от этого условия.

Какое наибольшее число полей можно пересечь одним разрезом?

Очевидно, все поля доски образуются в результате пересечения 18 прямых – девяти вертикальных и девяти горизонтальных. С каждой из 14 внутренних линий прямая-разрез может пересечься лишь в одной точке, а из четырех граничных – с двумя. Значит, всего имеется не больше 16 точек пересечения, разбивающих прямую-разрез на 15 отрезков, заключенных внутри полей.

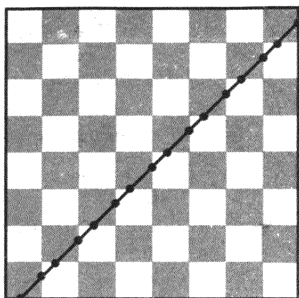


Рис.3 Пятнадцать полей и одна прямая

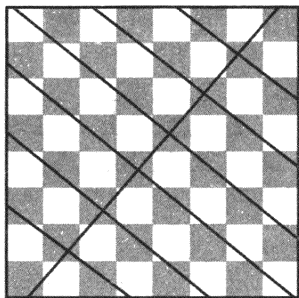


Рис.4 Семь прямых пересекают все поля доски

Из рисунка 3 следует, что ровно столько полей пересекает разрез, проведенный параллельно диагонали доски и проходящий через середины сторон двух угловых клеток.

Сколько нужно сделать разрезов, чтобы пересечь все 64 поля доски?

Разумеется, восьми прямых достаточно — по одной вдоль каждой вертикали или горизонтали. Однако оказывается, что можно ограничиться и семью прямыми. Одну из них следует провести через центр доски почти в диагональном направлении, а шесть других — в направлениях, почти перпендикулярных ей (рис.4).

Многие задачи и головоломки на доске 8×8 легко обобщаются для прямоугольных досок $m \times n$ (с m вертикалями и n горизонталями — считаем, что $m \geq n$) или, как частный случай, для квадратных досок $n \times n$ — при тех или иных значениях m и n . Доска четная, если число ее полей четно, и нечетная — в противном случае. Если в задаче не говорится о размерах доски, то имеется в виду стандартная шахматная доска, $m = n = 8$.

Предыдущие две задачи нетрудно сформулировать для произвольной квадратной доски. Нетрудно убедиться, что на доске $n \times n$ существует разрез, пересекающий $2n - 1$ поле, и достаточно провести $n - 1$ разрез ($n > 2$), чтобы пересечь все поля.

На доске отмечены центры всех 64 полей (рис.5,а). Можно ли провести на ней 13 прямых (не проходящих через отмеченные точки) так, чтобы в каждой из частей, на которые прямые разобьют доску, оказалось не более одной точки?

На рисунке 5,а 14 прямых (внутренние границы вертикалей и горизонталей доски) отделяют друг от друга все центры полей. Убедимся, что 13 прямых уже недостаточно. Рассмотрим квадрат, стороны которого проходят через 28 центров граничных

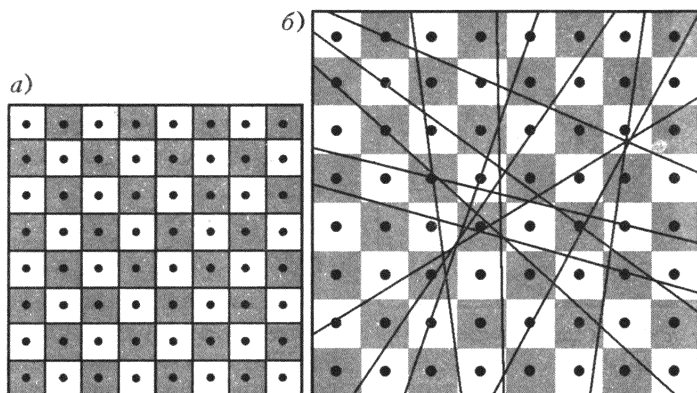


Рис.5. Четырнадцать прямых разделяют центры полей

полей. На рисунке 5,б эти центры отмечены, хотя сам квадрат отсутствует. Очевидно, 13 прямых пересекают его не более чем в 26 точках и поэтому разрезают не более чем на 26 отрезков, т.е. по меньшей мере два граничных центра окажутся в одной части. Значит, для разделения 28 граничных, а следовательно, и всех центров понадобится не менее 14 прямых.

Завершим эту тему любопытным парадоксом. Разрежем доску на четыре части, как показано на рисунке 6,а (поля специаль-

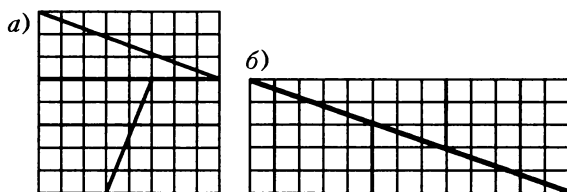


Рис.6. Парадокс с разрезанием

но не раскрашены в два цвета, чтобы немного запутать читателя), и составим из них прямоугольник – рисунок 6,б.

Площадь доски равна $8 \times 8 = 64$, а площадь полученного прямоугольника – $13 \times 5 = 65$. Таким образом, при разрезании доски откуда-то взялось лишнее поле!

Разгадка парадокса в том, что чертеж на рисунке 6,б выполнен не совсем аккуратно (мы умышленно провели толстые линии, чтобы скрыть неточность). Если сделать его точнее, то вместо диагонали прямоугольника появится еле заметный для глаза параллелограмм. Площадь его как раз и дает то самое «лишнее» поле.

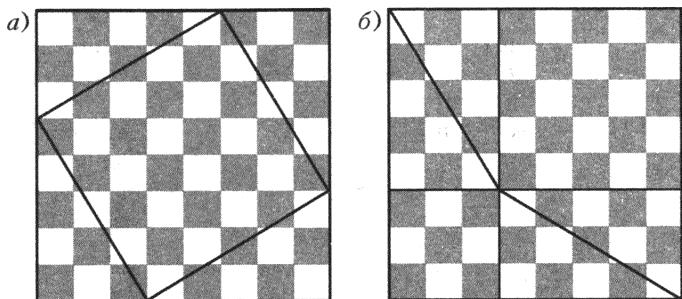


Рис.7. Теорема Пифагора на шахматной доске

На очереди доказательство теоремы Пифагора на шахматной доске. Начертим на ней квадрат, в результате чего доска разобьется на пять частей – сам квадрат и четыре одинаковых прямоугольных треугольника – рисунок 7,а. А на рисунке 7,б перед нами те же четыре треугольника, но вместо одного большого квадрата – два, меньших размеров.

Площадь треугольников в обоих случаях одна и та же, значит, равную площадь имеют и оставшиеся части доски: в первом случае один квадрат, во втором – два. Поскольку большой квадрат построен на гипотенузе прямоугольного треугольника, а маленькие – на его катетах, приходим к выводу, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Теорема Пифагора «доказана»!

Другую тему, имеющую прямое отношение к шахматной доске, начнем со следующей старинной головоломки.

Можно ли покрыть костями домино 2×1 квадрат 8×8 , из которого вырезаны противоположные угловые клетки (рис. 8,а)?

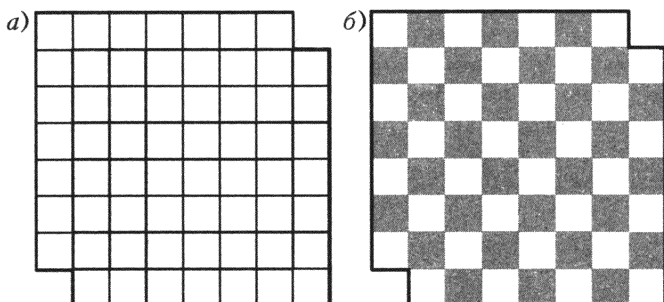


Рис.8. Задача о домино

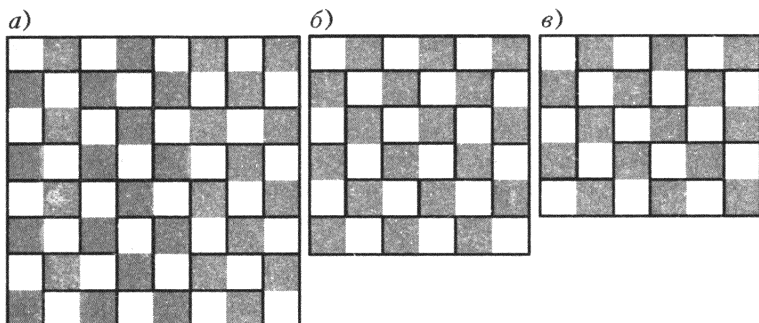


Рис 10. Проверка досок на прочность

прочную кладку – шахматная стенка не рухнет. Квадрат или прямоугольник, который удастся покрыть указанным образом, называется прочным, в противном случае он непрочный. Из последней задачи следует, что стандартная доска является прочной.

Доска 100×4 полностью покрыта костями домино. Можно ли ее распилить по одной из линий между вертикалями и горизонталями, не повредив ни одной кости?

Любая из линий делит доску на две части, состоящие из четного числа полей. Поля каждой части разобьем на два типа: покрытые домино, целиком лежащими в этой части, и покрытые домино, пересекаемыми границами. Поскольку число полей каждой части четно (может быть, нуль), как и число полей первого типа (каждое домино покрывает два поля), то число полей второго типа тоже четно. Значит, четно и число пересеченных костей. Всего линий 102 (99 вертикальных и 3 горизонтальных), и если предположить, что каждая пересекает домино, то в покрытии участвует не менее $2(100 + 2) = 204$ домино. Но в нашем распоряжении их только 200. Итак, найдется хотя бы одна линия, по которой можно распилить доску, не задевая домино, и доска 100×4 является непрочной.

Является ли прочной доска 6×6 ?

И эта доска непрочная. Доказательство аналогично предыдущему. В данном случае линий 10 (по пять вертикальных и горизонтальных). Если предположить, что каждая пересекает домино, то в силу соображений четности она пересекает два домино, а всего – 20. Но на доске 6×6 уместается только 18 домино! Непрочная доска 6×6 изображена на рисунке 10,б (две горизонтальные линии, по которым можно распилить «стенку», здесь выделены).

Доказано, что если обе стороны четной доски $m \times n$ больше четырех, то любая из них – за исключением 6×6 ! – является прочной. Из этого следует, что прочная доска наименьшей площади имеет размеры 6×5 (рис.10,в).

Головоломки о доске и домино лежат в основе целого направления занимательной математики под названием «полимино». В общем случае вместо домино используются фигурки полимино, состоящие из связанных между собой квадратов. С точки зрения шахматиста, связность означает, что все квадраты можно обойти ходом ладьи. В зависимости от числа квадратов полимино бывают разного типа. Мономино 1×1 состоит из одного квадрата, домино 2×1 – из двух квадратов, тримино из трех, тетрамино – из четырех и т.д. Полимино, содержащие более двух квадратов, имеют разную форму. Например, тримино 3×1 – прямое и треугольное, тетрамино 4×1 – прямое и еще четырех типов. В задачах о полимино покрываются различные доски, не обязательно прямоугольные.

Очевидно, покрыть доску прямыми тримино 3×1 невозможно, так как 64 не делится на 3.

Можно ли покрыть доску 21 тримино 3×1 и одним мономино? Если да, то какие поля может занимать при этом мономино?

Одно из покрытий показано на рисунке 11,а. Для определения возможных полей для мономино проведем на доске два вида параллельных прямых, сплошных и пунктирных (рис.11,б).

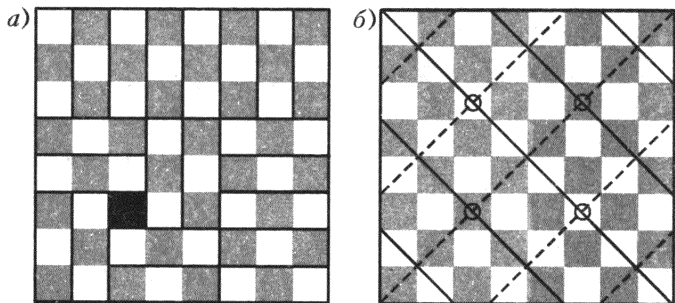


Рис.11. Задача о тримино

Очевидно, каждое прямое тримино покрывает ровно одно поле, через которое проходит сплошная линия, и ровно одно, через которое проходит пунктирная. Всего полей, пересекаемых и теми, и другими линиями, 22, а тримино – 21. Значит, мономино должно располагаться на поле, через которое проходит одна из

сплошных и одна из пунктирных прямых. Но таких полей всего четыре – с3, с6, f3, f6 (они отмечены на рисунке 11,б), и мономино может находиться только на них! Поворачивая рисунок 11,а на 90° , 180° и 270° , получим покрытие для каждого из четырех полей.

Можно ли прямоугольную доску $m \times n$ покрыть целиком прямыми k -мино (домино $k \times 1$)?

Ответ положительный только в том случае, если хотя бы одно из чисел m , n делится на k .

Можно ли покрыть доску 10×10 прямыми тетрамино 4×1 ?

Тетрамино состоит из четырех квадратов, и в принципе 25 костей могли бы покрыть всю доску. Однако это невозможно: 10 не делится на 4!

Какое наибольшее число диагоналей можно провести на доске так, чтобы никакие две не имели общих точек?

На рисунке 12,а проведены 36 диагоналей. Докажем, что больше провести невозможно. Один из концов любой диагонали упирается в какую-то из точек на рисунке 12,б. Но точек 36, значит, диагоналей не больше.

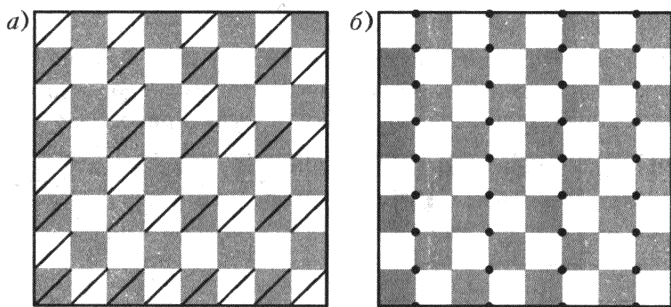


Рис.12. Задача о диагоналях

Интересно, что шахматная доска обладает своеобразной геометрией, особенно это проявляется в эндшпиле. Геометрические мотивы используются в шахматных комбинациях, этюдах и задачах: завлечение, отвлечение, перекрытие, перегрузка, связка и др. Маршруты фигур бывают разнообразны: лестницы, виражи, маятники, ромбы, квадраты, треугольники, окружности и т.д.

Одно из самых интересных свойств шахматной доски состоит в том, что на ней не всегда действуют законы евклидовой геометрии. Эта тема довольно интересная, но скорее относится к

практической игре, поэтому мы ограничимся двумя примерами.

Этюд на рисунке 13 поражает каждого, кто знакомится с ним впервые.

Черный король в двух шагах от неприятельской пешки, а его собственная как будто неужержимо мчится вперед. И все же белые догонят пешку! Разумеется, при прямолинейном маршруте – 1. ♚ h7 h4 2. ♚ h6 h3 и т.д. толку мало. Но король совершает весьма неожиданный и парадоксальный маневр.

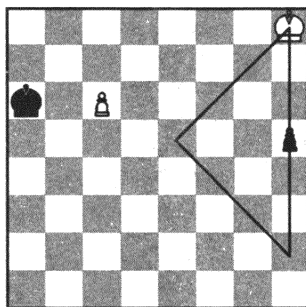


Рис 13. РРети Ничья

1. ♚ g7! h4 2. ♚ f6! ♚ b6. После 2...h3 3. ♚ e7 h2 4. c7 ♚ b7 5. ♚ d7 пешки становятся ферзями одновременно. 3. ♚ e5! ♚ :c6. Вновь 3...h3 4. ♚ d6 h2 5. c7 ♚ b7 6. ♚ d7 ведет к появлению на доске двух ферзей. 4. ♚ f4 h3 5. ♚ g3 h2 6. ♚ :h2, и пешку удалось настичь на пороге ее превращения. Невероятное стало очевидным.

Как же белым удалось спастись? Все дело в необычной геометрии доски. Мы привыкли к тому, что кратчайший путь между двумя пунктами, двумя точками измеряется по прямой. Да, в реальной жизни действуют законы эвклидовой геометрии! Однако в шахматах кратчайшее расстояние между двумя полями не обязательно прямая. Так, в нашем примере король может преодолеть путь между полями h8 и h2 за шесть ходов как при прямолинейном, так и при зигзагообразном движении. Выбирая «кривой» путь, белые выигрывают время, вынуждая короля черных сделать два лишних хода, в результате чего их пешка теряет скорость.

Любопытно, что из 51 шестиходового пути короля с h8 до h2 спасает лишь один! Можно сказать, что с точки зрения короля сумма катетов прямоугольного треугольника h8-e5-h2 равна его гипотенузе (см. рис.13). Такую математическую теорему можно доказать только на шахматной доске...

Пешечный квартет Рети в свое время произвел настоящую сенсацию в шахматном мире. Необычная геометрическая идея, которая так и называется маневр Рети, неоднократно совершенствовалась, углублялась, но по чистоте формы и лаконичности материала оригинал превзойти невозможно.

Второй пример – из поединка на первенство мира (Москва, 1951 г.), в котором тоже проявилась своеобразная геометрия шахматной доски (рис.14).

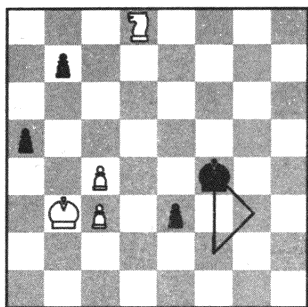


Рис 14 Бронштейн — Ботвинник

В шестой партии этого давнего матча белые легко делали ничью -- 1. ♖е6+ и 2. ♖d4. Но Бронштейн решил сначала приблизиться королем к пешке и сыграл 1. ♔с2. Конечно, гроссмейстер понимал, что черный король в состоянии появиться на поле f2, но, наверное, рассматривал лишь прямолинейный маршрут ♔f4-f3-f2, полагая, что и тогда успеет подтянуть коня. Каково же было его изумление, когда

неприятельский король действительно направился к полю f2, но не по прямому пути, а по зигзагу!

После 1... ♔g3!! белые сразу сдались, так как пешка неудержима: 2. ♖е6 e2, и белый конь попадает на d4 без шаха (3. ♔d2 ♔f2!).

Примечательно, что победу черным обеспечил именно хитрый маневр короля ♔f4-g3-f2, а прямолинейное движение вело к ничьей! После 1... ♔f3? 2. ♖f7! (но не 2. ♖е6 e2 3. ♖d4+ ♔f2 4. ♖:e2 ♔:e2 5. ♔b3 b6! 6. ♔a4 ♔d3 7. ♔b5 a4! 8. ♔:a4 ♔:c4 и т.д.) 2...e2 3. ♖e5+ ♔f2 4. ♖d3+ ♔f1 5. ♔b3 e1 ♔ 6. ♖:e1 ♔:e1 7. ♔a4 пешечное окончание оказывалось ничейным.

Итак, законы шахматной геометрии утверждены в самой высокой инстанции — в матче на первенство мира.

КОНЬ АТТИЛЫ

От других фигур конь прежде всего отличается тем, что, перемещаясь по доске, на каждом ходу меняет цвет поля, на котором стоит. Многие задачи и головоломки эффектно решаются, если воспользоваться этим свойством, характерным только для него. Вот простейшая из них.

Может ли конь добраться из одного угла доски до противоположного, посетив каждое поле ровно один раз?

Нет. Пусть исходное поле $a1$. Оно черное, и на каждом нечетном ходу конь попадает на белое поле. Значит, закончить свой путь на 63-м ходу он должен на белом поле. Но противоположный угол тоже черный – противоречие.

В нашей книге много внимания уделено задачам о движении фигур по доске. Перемещение той или иной фигуры между двумя полями доски мы называем путем этой фигуры. А путь, который проходит через все поля доски (для слона – через все одноцветные), называем маршрутом. Обычно предполагается, что дальнобойная фигура (ферзь, ладья, слон), проходя по своему маршруту, не останавливается на каждом из промежуточных полей, а лишь пробегает через них (может быть, по несколько раз). Конечно, понятия пути и маршрута довольно условны, но в конкретных случаях всегда понятно, что имеется в виду.

Маршрут фигуры называется замкнутым, если, обойдя всю доску, она может вернуться на исходное поле, и открытым, если старт и финиш не связаны между собой ходом этой фигуры.

Любому пути или маршруту фигуры по доске соответствует график, который получается в результате последовательного соединения центров полей фигуры, на которых она останавливается.

Ниже мы будем часто использовать математическое понятие граф. Геометрически граф можно определить как множество точек (вершин графа), соединенных линиями (ребрами графа). Каждой фигуре можно поставить в соответствие граф, вершины которого отвечают некоторым полям доски (может быть, всем). Вершины соединяются ребром в том случае, если между соответствующими полями возможен ход данной фигуры. Перемещению фигуры соответствует некоторый путь (маршрут) между вершинами графа, и наоборот. Можно сказать, что график

иллюстрирует конкретное движение фигуры по доске, а граф отражает совокупность всех ее возможных ходов.

В книге рассматриваются задачи о путях и маршрутах для каждой из фигур. При этом встречается не только стандартная доска, но и различные прямоугольные доски $m \times n$, в том числе квадратная $n \times n$.

Задача о коне Аттилы. На доске две фигуры – белый конь и черный король. Некоторые поля объявляются «горящими». Конь должен дойти до неприятельского короля, повергнуть его и вернуться на исходное место. При этом ему запрещено занимать как горящие поля, так и уже пройденные.

«Трава не растет там, где ступил мой конь!» – похвалялся вождь гуннов Аттила, намекая, что предводительствоваемые им полчища уничтожают все живое на своем пути.

На рисунке 1,а конь Аттилы расположен на g4, а неприятельский король – на b3, горящие поля заштрихованы.

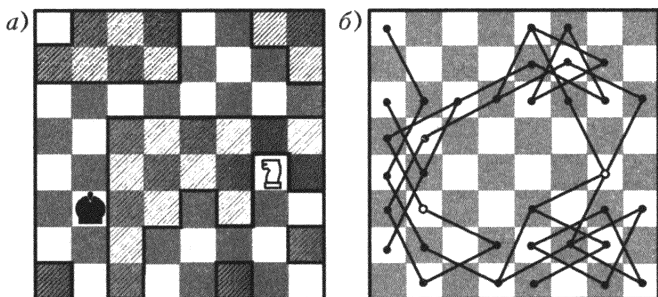


Рис. 1 Конь Аттилы

Соединяя центры доступных коню полей, между которыми возможен его ход, получаем граф для данной задачи (рис.1,б). В результате дело сводится к нахождению в этом графе такого пути, который не содержит ни одной вершины более одного раза и, кроме того, проходит через обе выделенные.

Методы решения подобных задач, называемых лабиринтными, хорошо известны. Впрочем, для коня Аттилы искомый путь нетрудно найти и непосредственно, он содержит 18 ходов: ♞ g4-f6-e8-g7-e6-f8-g6-e7-c6-a5:b3-d2-b1-a3-b5-d6-f7-h6-g4. Для достижения цели коню пришлось побывать на 18 полях из 35, не сожженных в начале сражения.

Введем еще одно понятие. Путь (маршрут) фигуры на доске называется несамопересекающимся, если его график не имеет самопересечений.

Сколько ходов содержит самый длинный несамопересекающийся путь коня на шахматной доске?

Искомый путь состоит из 35 ходов (он показан на рисунке 2,е). Любопытно, что раньше человека он был обнаружен компьютером. Головоломка была исследована вдоль и поперек для различных прямоугольных досок $m \times n$, и установлены соответствующие рекорды. На рисунке 2 показаны несамопересекающиеся пути коня наибольшей длины для досок $n \times n$ при n от 3 до 8. На доске 6×6 снова постаралась машина – предложила 17-ходовый путь без самопересечений (рис.2,г). Только на доске 7×7 самый длинный путь является замкнутым (рис.2,д).

На скольких полях бесконечной доски может оказаться конь за k ходов, начиная свой путь с заданного места?

Обозначим искомое число полей через $N(k)$. Легко проверить, что $N(1) = 8$, $N(2) = 33$. За три хода ($k = 3$) конь с

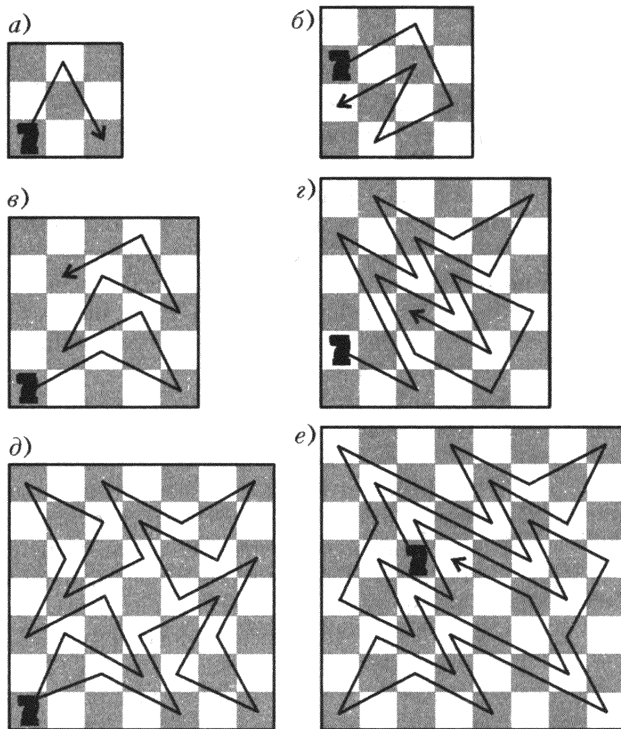


Рис.2. Несамопересекающиеся пути коня

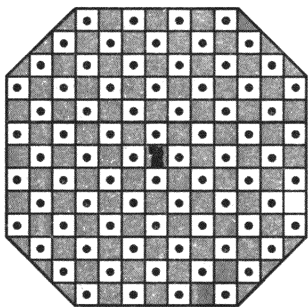


Рис.3 Куда попадет конь?

исходного черного поля попадает на все белые поля восьмиугольника с центром в этом поле (рис.3). Методом математической индукции нетрудно доказать, что при любом $k \geq 3$ поля, которых достигает конь, полностью заполняют некоторый восьмиугольник: все его черные поля при четном k и все белые — при нечетном (исходное поле — черное). Подсчитав число одноцветных полей в восьмиугольнике, получаем:

$$N(k) = 7k^2 + 4k + 1.$$

Для других фигур эта задача не представляет интереса. Король за k ходов попадает на любое поле квадрата $(2k+1) \times (2k+1)$ с центром в исходном поле. Ферзь и ладья за два хода достигают любого поля бесконечной доски, а слон — любого поля того же цвета, что исходное.

Конь сделал восемь ходов и вернулся на исходное поле. Мог ли он при этом побывать на всех вертикалях и горизонталях доски?

Нет. Предположим, что конь посетил все линии доски. Так как маршрут замкнут, точкой отсчета можно считать поле нижней горизонтали. Рано или поздно конь оказывается на верхней горизонтали, т.е. смещается по вертикали на семь полей. Поскольку он возвращается на место, общее число перемещений по вертикали не менее $7 + 7 = 14$ полей. Аналогично общее число перемещений по горизонтали не менее 14 полей. Значит, всего перемещений не менее 28. На каждом ходу смещение составляет $1 + 2 = 3$ поля. За 8 ходов число смещений коня не превысит $3 \cdot 8 = 24$. Противоречие: $24 < 28$.

На бесконечной доске расставлены пешки через три поля на четвертое (рис.4). Может ли конь последовательно обойти свободные поля такой доски, посещая каждое из них по одному разу?

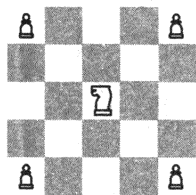


Рис. 4. Конь на бесконечной доске

Не может. Предположим, что искомый путь существует. Рассмотрим два квадрата: 196×196 и concentрично окаймляющий его 200×200 . При указанной расстановке пешек все они стоят на полях одного цвета, например, белого (см. рис.4) — в количестве 2500 на доске 200×200 . С каждого из $196^2/2 = 19208$ черных полей внутреннего квадрата конь попадает на одно из $200^2/2 - 2500 = 17500$ свободных белых полей окаймляющего квад-

рата. Так как $17500 < 19208$, то на некоторые белые поля конь встанет более одного раза – противоречие.

Группу коней на бесконечной доске назовем эскадроном, если они в совокупности могут сделать произвольное число ходов, не оставляя ни одного из коней без защиты. Эскадрон – активный, если при таком «дружном» перемещении он может занять одним из своих коней любое поле доски.

Из какого наименьшего числа коней состоит активный эскадрон?

Один или два коня вообще не образуют эскадрон, из трех или четырех коней сформировать эскадрон можно, но он будет перемещаться лишь на ограниченной территории. Наименьший активный эскадрон состоит из пяти коней. На рисунке 5 показано, как пятерка коней ход за ходом из положения 1 попадает в положения 5 и 11 (кони постоянно поддерживают друг друга). Положения 1 и 11 отличаются сдвигом по вертикали на одно поле. Отсюда следует, что в вертикальном направлении эта пятерка может сделать бесконечное число перемещений.

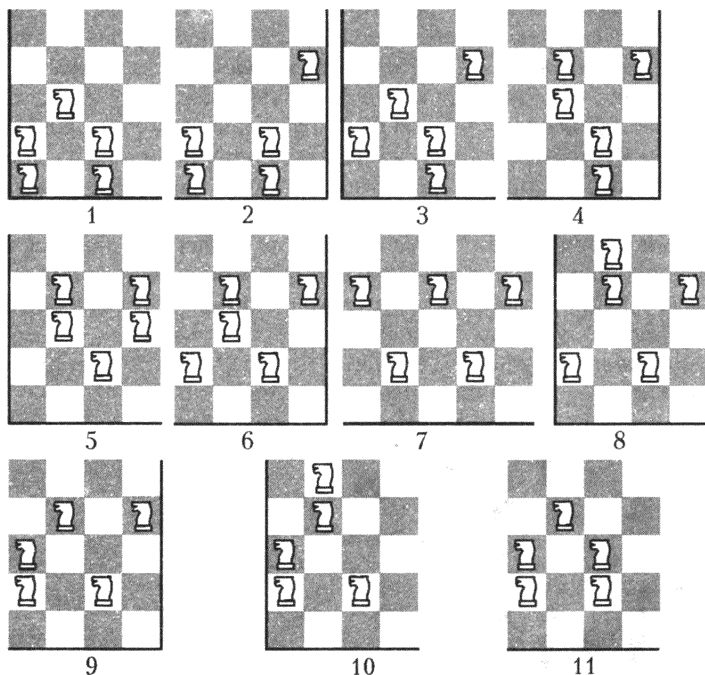


Рис 5 Эскадрон коней

Положения 1 и 5 сдвинуты относительно друг друга на одно поле по вертикали, одно по горизонтали и перевернуты на 180° . Таким образом, эскадрон из положения 1 может попасть на любое поле доски и, значит, является активным.

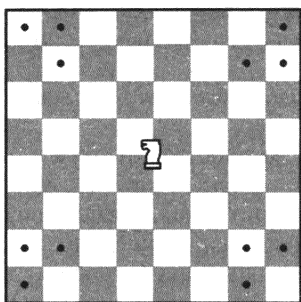


Рис.6. Сколько можно поставить коней?

На доске 8×8 расставлены 11 коней так, что никакие два не бьют друг друга. Докажите, что можно поставить еще одного коня, и снова никакие два не будут бить друг друга.

Рассмотрим 12 полей доски, отмеченных точками на рисунке 6. Конь может находиться на одном из них или нападать на одно из них, но не может делать и то и другое одновременно. Не может он и держать более чем одно из отмеченных полей. Поэтому среди этих 12 полей найдется хотя бы одно, на котором нет коня и

которое не бьется ни одним из стоящих одиннадцати. На это поле и можно поставить еще одного коня.

Какое наибольшее число коней можно расставить на доске 5×5 так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?

На рисунке 7,а видно, что 16 коней удовлетворяют этому условию. Докажем, что больше расставить нельзя. Сначала убедимся, что число коней на черных полях равно числу коней на белых. Действительно, если соединить отрезками бьющих друг друга коней, то любой отрезок соединяет белое поле с черным. С другой стороны, с каждого поля выходят два отрезка. Значит, общее число отрезков равно удвоенному числу коней на белых полях и удвоенному числу коней на черных, т.е. на белых и черных полях коней поровну.

Белых полей у нас 12, а черных – 13. Пусть t – число пустых белых полей, тогда число пустых черных – $t + 1$. При любом

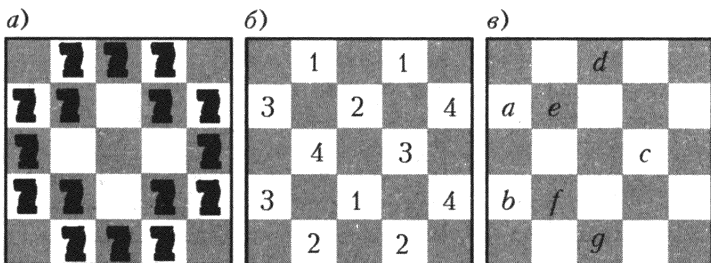


Рис.7. Каждый конь бьет двух других

оптимальном расположении центральное поле пустое. В противном случае, из восьми полей, которые конь бьет с него, ровно шесть пустых белых, $t \geq 6$, и число коней не превосходит $25 - 6 - (6 + 1) = 12$, а на рисунке 7,а их уже на 4 больше.

Теперь разобьем белые поля на четыре группы, как показано на рисунке 7,б (у полей одной группы одинаковые цифры). При оптимальном расположении по крайней мере одно поле каждой группы пустое. Предположим противное, например, на всех полях группы 3 стоят кони a, b и c (рис.7,в). С поля a конь нападает на поля f, d и центральное. Но центральное пусто, значит, на f и d стоят кони. В этом случае конь с поля c бьет четырех коней d, e, f и g , что противоречит условию. Итак, число пустых белых полей $t \geq 4$. Отсюда число коней не больше $25 - t - (t + 1) = 24 - 2t \leq 16$.

Для какого наибольшего k можно расставить коней на доске 8×8 так, чтобы каждый из них нападал ровно на k других?

Рассмотрим произвольную расстановку коней, удовлетворяющую условию. Возьмем коня, расположенного на горизонтали, ограничивающей конфигурацию на доске сверху. Тогда он может напасть самое большее на четырех коней. Осталось привести положение, в котором каждый конь бьет ровно четырех других. Оно показано на рисунке 8.

Какое наибольшее число полей можно отметить на доске 8×8 , чтобы с любого из них конь добирался до любого другого за два хода?

Таких полей восемь, на рисунке 9 на них стоят кони. Самое левое поле отстоит от самого правого на два хода, как и самое верхнее от самого нижнего. Из этого следует, что все поля находятся внутри квадрата 5×5 и их не больше восьми.

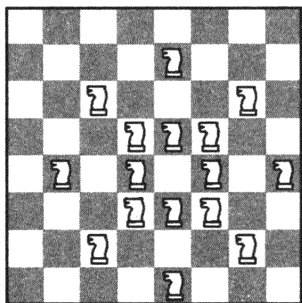


Рис.8. Каждый конь бьет четырех других

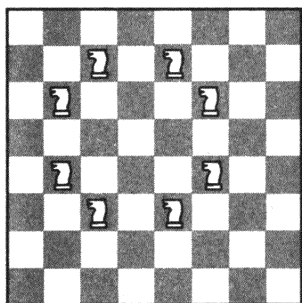


Рис.9. Между конями два хода

ЗАДАЧА О ХОДЕ КОНЯ

Вот самая известная задача о коне.

Обойти конем все поля шахматной доски, посетив каждое из них по одному разу.

Особая популярность задачи объясняется тем, что в XVIII и XIX веках ею увлекались многие математики, в том числе великий Леонард Эйлер, который в 1749 году посвятил ей большой трактат «Решение одного любопытного вопроса, который, кажется, не поддается никакому исследованию». Хотя задача была известна до Эйлера, именно он впервые обратил внимание на ее математическую сущность, и поэтому ее обычно связывают с его именем.

Значительно сложнее проблема, состоящая не в нахождении какого-то маршрута коня на доске, а в поиске всех маршрутов и подсчете их числа. Увы, эта задача не решена до сих пор, и, похоже, шансов на успех немного (что, видимо, и имел в виду Эйлер в своем труде). Доказано только, что число искомых маршрутов не больше C_{168}^{63} (число сочетаний из 168 элементов по 63), но превосходит 30 миллионов.

Придумано много методов нахождения тех или иных маршрутов коня, причем они носят имена их первооткрывателей – метод Эйлера и Вандермонда, рамочный метод Мунка и Коллини, метод деления на четверти Полиньяка и Роже и др.

Напомним, что маршрут коня называется замкнутым, если с конечного поля он сразу возвращается на исходное. Графически такой маршрут представляет собой замкнутую линию, причем любое поле можно считать его началом и концом. А если старт и финиш не связаны между собой ходом коня, то маршрут является открытым.

Вот некоторые наиболее популярные методы нахождения маршрутов коня.

Рамочный метод Мунка и Коллини. Шахматную доску разделим на две части: внутреннюю из 16 полей и внешнюю, имеющую форму рамы и состоящую из 48 полей (рис.1). На полях внутреннего квадрата запишем заглавные буквы *A, B, C, D*, чтобы каждая из них, повторенная четыре раза, образовала квадрат или ромб, по сторонам которого может пройти конь. Те же буквы, только строчные, запишем в рамочных полях, чтобы

ходы коня по каждой из букв образовали замкнутые многоугольники, окаймляющие центральный квадрат. Конь начинает свой маршрут от какого-нибудь рамочного поля, проходит вдоль рамы по выбранной букве, например *a*, и за 12 ходов исчерпывает ее (последнее поле не должно быть угловым). Затем он переходит во внутренний квадрат, но не на букву *A*, а на любую другую. Пройдя все поля, помеченные ею, снова возвращается на раму

– на букву, по которой еще не ходил, вновь обегает квадрат, исчерпывая вторую букву, и т.д., пока не пройдет по всей доске.

Метод Полиньяка и Роже – деление на четверти. Этот метод проще предыдущего, хотя похож на него. Разделим доску крестом на четыре квадрата (рис.2). В каждом из них расставим буквы *a*, *b*, *c*, *d* точно так же, как во внутреннем квадрате на рисунке 1.

Конь начинает движение с любой буквы, проходит в выбранном квадрате по всем четырем полям с ней, затем переходит на ту же букву соседнего квадрата, и т.д. Исчерпав все 16 полей с одной буквой, меняет ее и снова зигзагом обегает доску. После четырех таких кругов все поля будут пройдены (как и в предыдущем методе, «круговые» маневры не должны заканчиваться на угловом поле).

Поля в маршруте или пути коня удобно нумеровать числами 1, 2, 3, ... в соответствии с порядком их посещения. Начальное поле имеет номер 1, а конечное – 64. Конечно, изменив направление маршрута на противоположное, всегда можно поменять начальное и конечное поля. Если маршрут замкнут, поля 1 и 64 связаны ходом коня. Поскольку цвет полей на каждом ходу меняется, все нечетные поля в маршруте одного цвета, а четные – другого.

Метод Эйлера и Вандермонда. В отличие от предыдущих, этот метод позволяет получать разнообразные маршруты. В его основе лежит возможность замены обратными всех ходов, начиная с поля, связанного с конечным. В качестве примера рассмот-

♞	a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b	
b	a	A	B	C	D	d	c	
d	c	C	D	A	B	b	a	
a	b	B	A	D	C	c	d	
c	d	D	C	B	A	a	b	
b	a	d	c	b	a	d	c	
d	c	b	a	d	c	b	a	

Рис.1 Метод Мунка и Коллини

♞	a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b	
b	a	d	c	b	a	d	c	
d	c	b	a	d	c	b	a	
a	b	c	d	a	b	c	d	
c	d	a	b	c	d	a	b	
b	a	d	c	b	a	d	c	
d	c	b	a	d	c	b	a	

Рис.2 Метод Полиньяка и Роже

рим маршрут на рисунке 3,а. Используя связь поля 31 с конечным 64, получим еще один маршрут. Оставим все числа 1, 2,..., 31 на своих местах, а числа 32, 33,..., 64 заменим соответственно на 64, 63,..., 32. Иначе говоря, один последовательный путь (от 32 до 64) заменяем другим, обратным (от 64 до 32). Теперь поле h4, изменившее номер 32 на 64, стало конечным. Новый маршрут в старой нумерации полей можно записать так: от 1 до 31, 31–64, от 64 до 32.

Указанный прием можно повторять многократно, получая все новые и новые маршруты. В исходном маршруте поле 49 также связано с 64, что дает нам другой производный маршрут: от 1 до 49, 49–64, от 64 до 50. В первом из найденных маршрутов поле 32 связано с 43, и мы можем получить второй производный маршрут: от 1 до 31, 31–64, от 64 до 43, 43–32, от 32 до 42 и т.д.

Если дан некоторый маршрут, то, проявив определенную изобретательность, его можно преобразовать, чтобы любое заданное поле стало конечным (а значит, и начальным). Пусть, например, мы хотим сделать конечным поле d4 с номером 56. Свяжем его с полем 64 такими ходами: 64–31–32–57–56. Теперь дважды преобразуем исходный маршрут коня (рис.3,а): 1) от 1 до 31, 31–64, от 64 до 32; 2) от 1 до 31, 31–64, от 64 до 57, 57–32, от 32 до 56. Последний маршрут заканчивается на поле d4, к чему мы и стремились. Описанным методом из открытого маршрута иногда удается получить замкнутый. Так, для превращения открытого маршрута на рисунке 3,а в замкнутый достаточно заменить пути: от 11 до 17, от 10 до 1, от 18 до 31, от 64

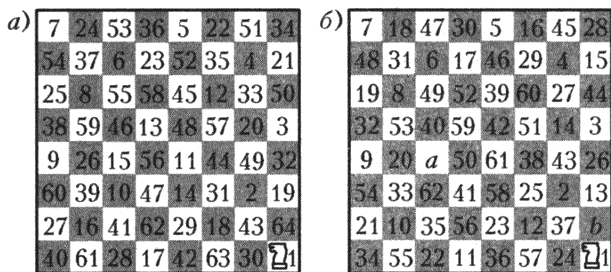


Рис.3. Метод Эйлера и Вандермонда

до 57, от 32 до 45, от 56 до 46 следующими: от 1 до 7, от 8 до 17, от 18 до 31, от 32 до 39, от 40 до 53, от 54 до 64.

Основное достоинство данного метода заключается в том, что он помогает завершить путь коня даже в тех случаях, когда мы двигались без всякой системы и попали в тупик – дальше идти

некуда, а еще остались не пройденные поля. Пусть, например, уже побывали на 62 полях доски (от 1 до 62 на рис.3,б), а поля a и b не посетили. Здесь поле a связано с 10, а поле 62 с 9. Это позволяет преобразовать путь от 1 до 62 в такой: от 1 до 9, 9–62, от 62 до 10. После перенумерации поле b 2 меняет номер 10 на 62, и под номером 63 к пути присоединяется поле a . Осталось добавить к пути поле b . Помогает то обстоятельство, что из двух последовательных полей 57 и 58 первое связано с b , а второе – с a (сейчас его номер 63). Теперь первоначальный путь превращается в такой: от 1 до 9, 9–62, от 62 до 58, 58– a , a –10, 10–57. После очередной перенумерации номер 63 получает бывшее поле 57, и, присоединяя его к b , получаем, наконец, искомый маршрут на рисунке 3,а.

Рассмотренные преобразования – далеко не единственные, позволяющие из одних маршрутов получать другие. Упомянем преобразования, связанные с поворотами доски и отражением ее относительно осей или центра симметрии. Заметим, кстати, что из одного замкнутого маршрута можно получить 127 новых: 63 сдвигом нумерации ходов, а из этих 64 – еще столько же изменением направления маршрута.

Вот самое простое и эффективное правило нахождения маршрутов коня на шахматной доске.

Правило Варнсдорфа. 1) При обходе доски коня следует на каждом ходу ставить на поле, с которого он может сделать наименьшее число прыжков на еще не пройденные поля; 2) если таких полей несколько, выбор произволен.

Это правило было предложено более полутора столетий назад, и долгое время считалось, что оно действует безукоризненно. Но уже в наше время было установлено, что его вторая часть не совсем точна. Если в распоряжении коня имеется несколько возможностей, упомянутых в первой части правила, то не все они равноценны. Оказывается, вольное применение

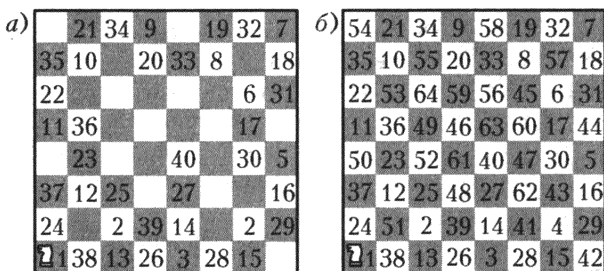


Рис.4 Правило Варнсдорфа

второй части может привести коня в тупик. Впрочем, иногда завершить маршрут удастся даже в том случае, если начало его произвольно.

На рисунке 4,а конь, начав путешествие с a1, уже сделал 40 ходов. В этой трудной ситуации, пользуясь правилом Варнсдорфа, ему удастся благополучно завершить маршрут. С поля 40 он мог бы пойти, кроме f2 с номером 41, на поля c5, d6, f6 и g3, каждое из которых связано с тремя свободными. А с поля f2 у коня только два выхода – на h1 и d3. Этим и объясняется выбор – на него ставится число 41 (рис.4,б).

При следующем ходе возникает вопрос относительно полей h1 и d3. Второе связано с четырьмя свободными, а первое – с одним g3, поэтому h1 получает номер 42. С него ход определяется однозначно – на g3, номер 43. Теперь у коня выбор между полями f5 и h5, причем каждое связано с тремя свободными. Согласно правилу, можно выбрать любое, в нашем случае h5 (номер 44). Продвигаясь далее тем же способом, конь в конце концов попадет на поле с номером 64.

Строго говоря, по данному правилу обход доски следует начинать с углового поля, так как именно с него в начале меньше всего возможных прыжков коня – два. Путь на рисунке 4,а до поля 13 согласуется с указанным правилом, но очередной ход на e2 противоречит ему. С поля 13 у коня имелся выбор из пяти возможностей, и, как легко видеть, «точнее» было пойти на a2, а не на e2.

Многие составители маршрутов коня стремились внести в свое занятие, насколько возможно, эстетический элемент и достигли весьма любопытных результатов.

Маршрут, принадлежащий Янишу (рис.5), примечателен в нескольких отношениях. Он замкнут, образует полумагический квадрат (суммы чисел вдоль всех вертикалей и горизонталей равны 260) и, кроме того, обладает необычной симметрией – при повороте доски на 180° первая полови-

на маршрута (номера от 1 до 32) превращается во вторую (номера от 33 до 64). Кстати, построить маршрут, образующий настоящий магический квадрат (сумма чисел вдоль главных диагоналей тоже равна 260), никому не удалось.

Со времен Эйлера известен так называемый раздельный маршрут коня: сначала находится путь по одной поло-

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	21	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Рис.5. Маршрут Яниша

вине доски (например, по верхней с с5 до d5), затем он центрально-симметрично дублируется (с f4 до e4), и два пути соединяются вместе (рис.6). Очевидно, раздельный маршрут является замкнутым.

Для половины обычной доски – 8×4 – найдено точное число решений. Это позволило подсчитать число раздельных маршрутов коня на доске 8×8 , которое и дает нижнюю границу 30 миллионов.

Если говорить о графиках маршрутов коня, то здесь придумано множество необычных путешествий, изображающих различные предметы, знаки и буквы (например, букву N – решение, посвященное Наполеону). На рисунке 7 показаны два достопримечательных примера такого рода.

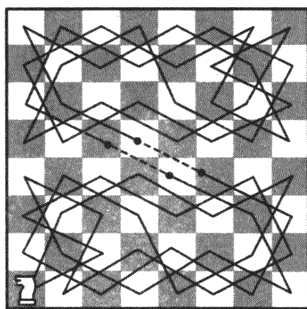


Рис.6. Раздельный маршрут коня

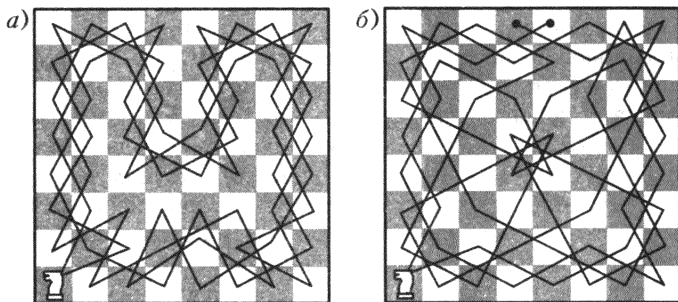


Рис.7 Ваза и цветок

График первого маршрута (рис.7,а) напоминает вазу, а график второго (рис.7,б) подобен цветку, части которого расположены в высшей степени симметрично.

Задача о ходе коня может быть поставлена для досок разной формы. Наиболее интересное обобщение возникает при рассмотрении произвольных прямоугольных досок.

При каких m и n конь может обойти все доску $m \times n$, посетив каждое из полей по одному разу?

Если хотя бы одна из сторон доски меньше 3, то, очевидно, искомого маршрута нет (вырожденный случай – доска 1×1 , на нее достаточно просто поставить коня). Если одна сторона равна 3, то вторая должна быть либо равна 4, либо не меньше 7. При

этом если она четна и не меньше 10, то имеется замкнутый маршрут. Если обе стороны больше 3, маршрут коня всегда существует, за исключением доски 4×4 . При этом на четных досках, если обе стороны больше 4, имеется замкнутый маршрут. Этим ответ на наш фундаментальный вопрос можно считать исчерпанным.

Исключения, касающиеся досок, одна из сторон которых равна 4, можно сформулировать в виде задач.

Докажите, что конь не может обойти доску 4×4 , посетив каждое ее поле один раз.

Подсчитаем общее число возможных ходов коня. Центральных полей четыре, и они дают самое большое восемь ходов (включая движение через углы). Остальные ходы образуют стороны квадратов $a2-b4-d3-c1$ и $a3-c4-d2-b1$. Поскольку квадраты замкнуты, из четырех ходов каждого в маршруте может быть использовано не более трех. Итак, всего имеем $8 + 3 + 3 = 14$ ходов. Однако чтобы обойти все поля доски 4×4 , требуется 15 ходов – противоречие.

Докажите, что при любом n на доске $n \times 4$ не существует замкнутого маршрута коня.

Предположим противное: пусть при некотором n замкнутый маршрут существует. Поля крайних горизонталей назовем внешними, а остальные – внутренними. И тех, и других имеется поровну – $2n$. Так как с внешних полей конь может попасть только на внутренние, то из $4n$ ходов, образующих замкнутый маршрут, половина именно таких. Тогда оставшиеся $2n$ ходов конь делает с внутренних на внешние. Поскольку на каждом ходу конь меняет цвет поля, то все крайние поля окрашены в один цвет, а все внутренние – в другой. Противоречие.

Из сказанного следует, что наименьшая по площади прямоугольная доска, которую может обойти конь, – 4×3 , любой маршрут на ней открытый (рис.8,а); наименьшие по площади прямоугольные доски с замкнутыми маршрутами – 6×5 (рис.8,б) и 10×3 (рис.8,в). Самая маленькая квадратная доска (квадрат

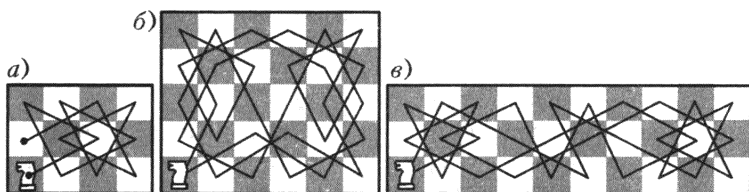


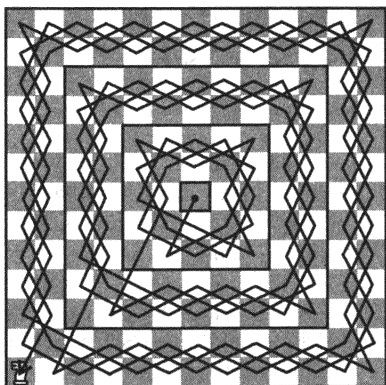
Рис.8. Маршруты коня на досках 4×3 , 6×5 и 10×3

1×1 не в счет) – 5×5 (центральный квадрат на рис.9,*а*). Она нечетная, и маршрут, разумеется, открытый.

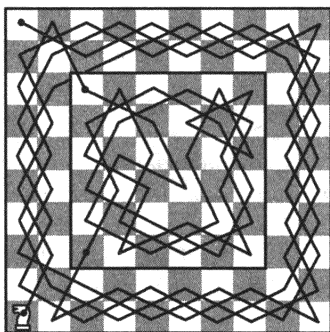
Итак, для любых $m, n \geq 5$ существует маршрут коня на доске $m \times n$ (замкнутый на четной доске и открытый на нечетной). Доказательство этого проводится в несколько этапов. Сначала для «основных» досок небольших размеров маршруты строятся непосредственно. Далее доска больших размеров разбивается на ряд основных, для которых маршруты уже построены. Эти микромаршруты связываются между собой, и в результате образуется искомым маршрут коня.

Для квадратных досок решение проще и компактнее. Приведем оригинальный метод нахождения маршрутов коня на произвольной квадратной доске $n \times n$ ($n \geq 5$). На рисунке 9,*а* показано, как обойти доску при $n = 4k + 1$ ($n = 5, 9, 13...$), на рисунке

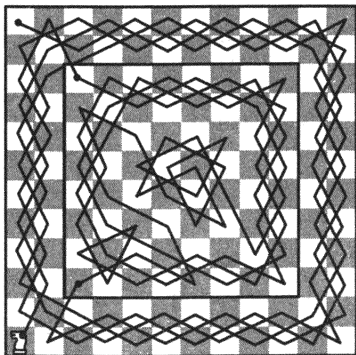
а)



б)



в)



г)

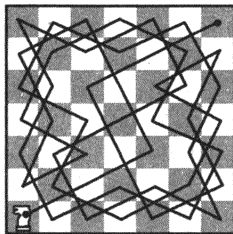


Рис.9 Маршруты коня на квадратных досках $n \times n$

д)

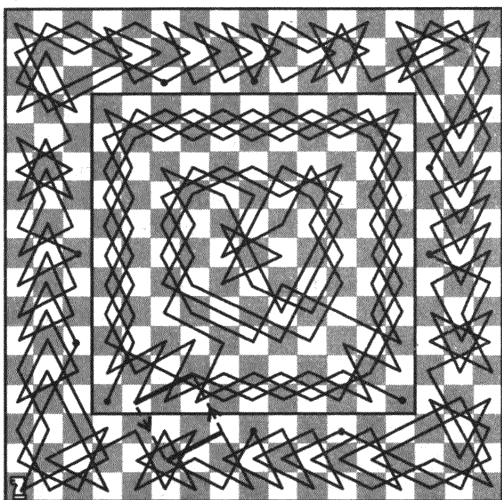


Рис.9. Маршруты коня на квадратных досках $n \times n$

9,б – при $n = 4k + 2$ ($n = 6, 10, 14, \dots$), на рисунке 9,в – при $n = 4k$ ($k > 1, n = 8, 12, 16, \dots$). На рисунке 9,г и 9,д (внутренний квадрат) показаны решения для досок 7×7 и 11×11 . Таким образом, мы имеем маршруты коня на всех досках $n \times n$ при $5 \leq n \leq 14$.

Общий метод построения вытекает из рисунка 9,д. Убедимся, что при любом $n \geq 14$ существует замкнутый обход полосы шириной в три поля, окаймляющей квадрат $(n - 6) \times (n - 6)$. На рисунке изображен обход такой полосы для доски 17×17 (полоса окаймляет квадрат 11×11). Обход полосы при $n > 17$ получается из данного увеличением числа треугольников между соответствующими парами полей, отмеченных точками. При $n = 15, 16$ число треугольников на каждой стороне на два или на один меньше, а при $n = 14$ точки сливаются, треугольники исчезают, и образуется маршрут на доске 14×14 , внутренний квадрат при этом имеет размеры 8×8 .

Если найден маршрут коня по внутреннему квадрату $(n - 6) \times (n - 6)$, то для получения маршрута по всей доске $n \times n$ достаточно исключить два хода, помеченных на рисунке 9,д жирными линиями, – один во внутреннем квадрате, второй в окаймляющей его полосе, и заменить их на два «пунктирных» хода, показанных стрелками.

Маршрут на произвольной доске $n \times n$ получается так:

сначала конь идет по внутреннему квадрату, отвлекается на окаймляющую полосу, обходит ее целиком, возвращается в квадрат и благополучно завершает маршрут.

Решение на доске $n \times n$ ($n > 14$) по существу сводится к решению на доске $(n-6) \times (n-6)$. В конце концов мы приходим к доске $n' \times n'$, $9 \leq n' \leq 14$. Поскольку для всех таких досок маршруты уже найдены, задача полностью решена.

Описанный метод (он принадлежит Н. Нецветаеву) дает возможность получать замкнутые маршруты коня на любой четной доске $n \times n$ ($n \geq 6$). Заметим, что маршруты на рисунках 9, а-в сами по себе не дают общего решения, так как не рассмотрен случай $n = 4k + 3$.

Маршрут, который проходит через все вершины графа по одному разу, называется гамильтоновым. Задача его нахождения в общем случае довольно сложная, что ярко проиллюстрировано на графах шахматных фигур, особенно коня. Этим, в первую очередь, объясняется особая популярность задачи о ходе коня в теории графов.

Рассмотрим перемещения коня между двумя полями, связанными между собой, например, ♖b1-с3 и ♜с3-b1, как один ход (в графе коня этим полям соответствует одно ребро).

Можно ли из всех ходов коня составить маршрут по шахматной доске, содержащий каждый из них по одному разу (при этом поля доски можно посещать по несколько раз)?

Поскольку в маршруте не должно быть повторений, то, попадая на некоторое поле одним способом, конь покидает его другим. Таким образом, каждое поле доски (кроме, быть может, начального и конечного) должно быть связано с четным числом полей. Однако на доске имеется восемь полей (a2, b1 и шесть симметричных им), с которых у коня по три хода на другие поля, т.е. указанное условие не выполняется, и ответ отрицательный.

Маршрут, который проходит через все ребра графа по одному разу, называется эйлеровым. Таким образом, в графе коня гамильтонов маршрут существует, а эйлеров – нет. В последующих главах будут построены маршруты по всем полям доски и для других фигур (для слона по одноцветным полям). Существование их означает, что в графах всех фигур имеется гамильтонов маршрут. Что же касается эйлерова маршрута, то им обладает только граф ладьи.

Рассмотрим теперь интересную задачу о ходе коня на фигурных досках определенного вида, похожих на квадратные, ее придумал и решил Н.Авилов.

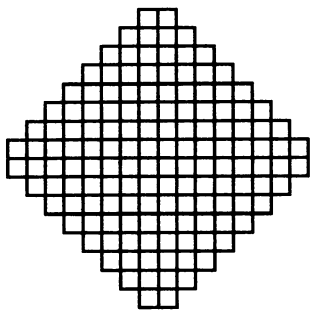


Рис.10. Ступенчатый квадрат 8-го порядка

Фигуру на рисунке 10 назовем ступенчатым квадратом («доски» в данной задаче мало похожи на шахматные, поэтому мы не будем раскрашивать их в черно-белый цвет). Размер или порядок его определим по числу ступенек на каждой стороне. Например, на данном рисунке изображен квадрат 8-го порядка (в отличие от доски 8×8 , в нем не 64, а 144 поля!).

Докажите, что конь может обойти все поля ступенчатого квадрата любого порядка, посетив каждое из них по одному разу.

Идея доказательства та же, что и для досок $n \times n$, но здесь немало дополнительных тонкостей. На рисунке 11, а-в показаны

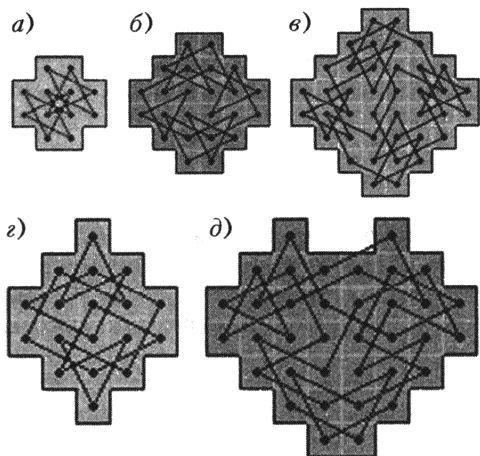


Рис.11. Обход базовых фигур

замкнутые маршруты для квадратов 2-го, 3-го и 4-го порядка. Нахождение искомого маршрута состоит из трех этапов.

а) Строим замкнутые маршруты коня для пяти базовых фигур. К ним относятся квадраты на рисунках 11, а-в и еще две фигуры – рисунки 11, г, д.

б) Разбиваем данный квадрат на базовые фигуры.

в) Объединяем обходы базовых фигур в один маршрут.

Для нахождения маршрута коня по всем полям квадрата 8-го порядка надо разбить его на базовые фигуры, как показано на

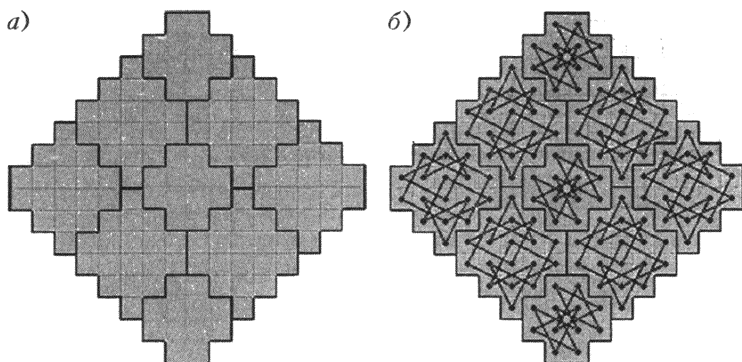


Рис.12 Разбиение на базовые фигуры

рисунке 12,а (их всего две – а и з на рисунке 11), и для каждой из них построить замкнутые обходы (рис.12,б). Осталось после чего объединить микромаршруты в один маршрут.

На рисунке 13 показано шесть возможных пар соседних базовых фигур для данного разбиения. В каждой паре выделены два звена, по одному в фигуре. Перекидывая их как «мостик» на

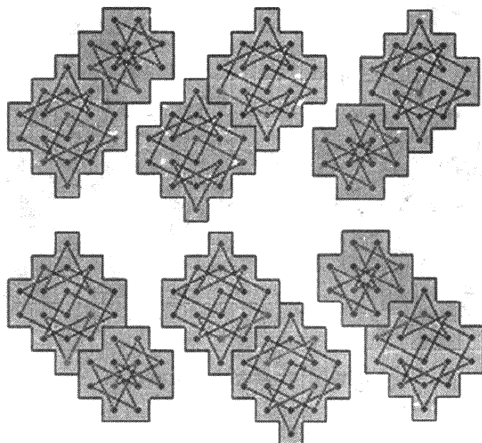


Рис.13 Соседние фигуры

соседнюю фигуру, получаем замкнутый обход пары. Аналогично объединяются обходы любых двух базовых фигур. Соседние фигуры разбиения можно связать при помощи «змейки» (например, как на рисунке .14,а). В результате имеем замкнутый маршрут коня по всем полям квадрата 8-го порядка (рис.14,б).

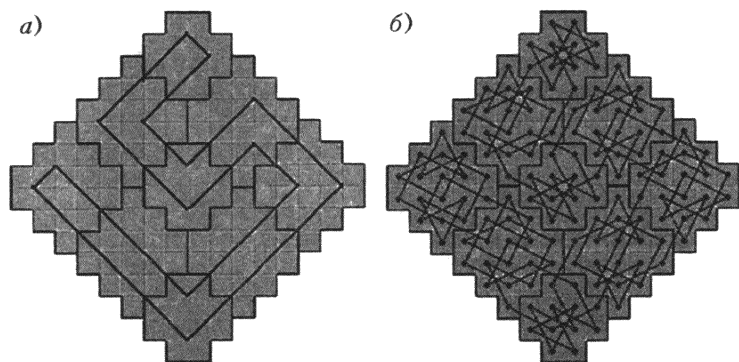


Рис.14. Обход змейкой квадрата 8-го порядка

Аналогично строятся маршруты коня для всех квадратов порядка $n = 3k + 2$ ($n = 8$ – частный случай), отличие – в разбиении квадрата на базовые фигуры (это зависит от его порядка n). Разбиение ступенчатых квадратов порядка $n = 3k$ и $n = 3k + 1$ на базовые фигуры показано на рисунках 15, а, б (для $k = 3$, $n = 9$ и $n = 10$).

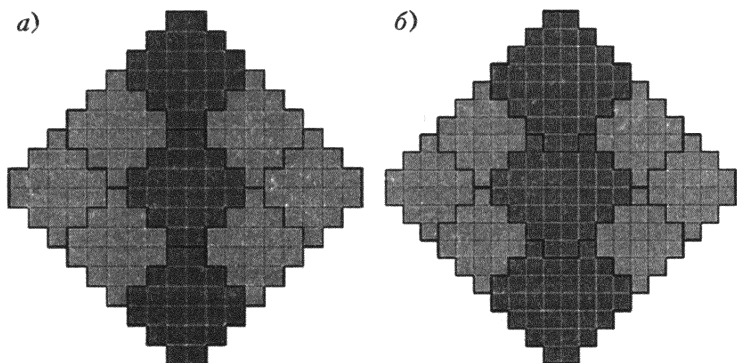


Рис.15. Разбиение квадратов 9-го и 10-го порядка

Имея обходы для каждой фигуры (все они базовые) и перекидывая мостики «змеевидным» способом, получаем необходимый маршрут – для наших случаев, соответственно, на рисунках 16, а, б.

Рассмотренный метод позволяет находить необходимый маршрут коня по всем полям ступенчатого квадрата любого порядка.

До сих пор мы рассматривали всевозможные доски, но можно немного изменить и сам ход коня. Обычно конь перемещается на

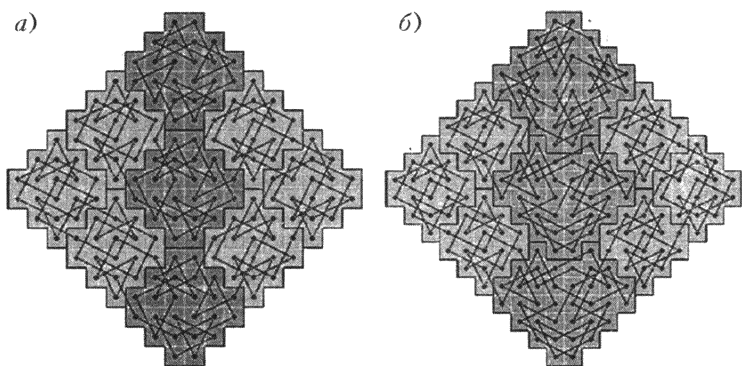


Рис.16. Обход ступенчатых квадратов

одно поле вдоль одной линии и на два вдоль другой, т.е. эта фигура – $(1, 2)$. Фигура (a, b) ходит, соответственно, на a и b полей вдоль двух направлений. Фигуры, которые возникают при различных a и b , в шахматной композиции (в разделе фантастических шахмат) называются волшебными или сказочными, например, фигура $(1, 3)$ – это верблюд. Подробно об этом пойдет речь в главе 16.

При каких a и b фигура (a, b) с произвольного поля бесконечной доски может попасть на любое другое?

Достаточно выяснить, при каких условиях конь может перейти с данного поля доски на соседнее по вертикали и горизонтали. Решение задачи требует использования аппарата теории чисел, и поэтому сразу дадим ответ: a и b должны иметь разную четность и быть взаимно просты.

Для коня $(1, 2)$ условия выполняются, и он попадает на любое заданное поле. А вот верблюд $(1, 3)$ может попасть только на поля того же цвета, что и исходное (оба числа 1 и 3 нечетны).

ФЕРЗЬ-ЧАСОВОЙ

Возможности ферзя чрезвычайно велики, и в шахматной математике он серьезно конкурирует с конем.

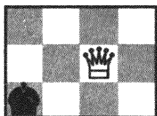


Рис.1 Как перегнать короля из угла в угол?

Может ли один белый ферзь перегнать черного короля из левого нижнего угла маленькой доски 4×3 (рис.1) в правый верхний угол?

Покажем сначала, как загнать короля в соседний угол: 1. ♔d2 ♕b1 2. ♔c3 ♕a2 3. ♔c1 ♕b3 4. ♔d2 ♕a3, и цель достигнута. Отправить короля в противоположный угол труднее: 1. ♔c3+ ♕a2 2. ♔c1 ♕b3 3. ♔a1 ♕c2 4. ♔a2+ ♕c3 (4... ♕c1 «проигрывает» быстрее: 5. ♔b3 ♕d2 6. ♔b1 ♕c3 7. ♔a2 ♕d3) 5. ♔b1 ♕d2 6. ♔b2+ ♕d1. Возникла позиция, симметричная исходной, но теперь короля нужно загнать уже в ближайший угол, что мы умеем делать. 7. ♔a2! ♕c1 8. ♔b3 ♕d2 9. ♔b1 ♕c3 10. ♔a2 ♕d3. Предполагается, конечно, что белые сохраняют своего ферзя, иначе решение на ход короче: 6. ♔d3+! ♕c1 7. ♔b3 ♕d2 8. ♔b1 ♕c3 9. ♔a2 ♕d3.

Аналогичным образом короля можно загнать в любой угол прямоугольной доски $m \times n$ большего размера ($m \neq n$). Удивительно, однако, что на квадратных досках, в том числе на обычной, завлечь его на угловые поля, ближайшие к исходному, невозможно. Король блуждает между двумя противоположными углами, и ферзь не в силах отвлечь его от этой траектории.

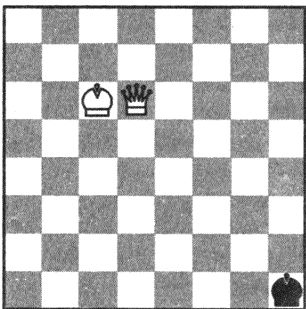


Рис.2 Неприкосновенный король

Задача о неприкосновенном короле. Белый король стоит на c6 и не имеет права двигаться. На доске также белый ферзь и черный король (например, как на рис.2). Всегда ли белые могут объявить мат черному королю?

Эта простая с виду головоломка, известная еще в XIX веке, требует серьезного анализа. Любопытно, что

даже гроссмейстеры, познакомившись с ней, сначала приходят к выводу, что заматовать короля нельзя. Правда, если сильного шахматиста предупредить, что мат есть, он его в конце концов находит.

Математики А.Брудно и И.Ландау для решения задачи решили привлечь компьютер. Рассматривались различные положения неприкосновенного короля, и оказалось, что мат неизбежен только тогда, когда тот занимает поле с6 или одно из симметричных ему – с3, f3, f6. Машина доказала, что, где бы ни находились белый ферзь и черный король, при белом короле на указанных полях мат ставится не позднее 23-го хода. Позиция на рисунке 2 как раз является рекордной по длительности игры. Прежде всего короля надо загнать в один из углов, a1 или h8.

1. ♖h6+ ♜g2 2. ♖h4 ♜g1 3. ♖h3 ♜f2 4. ♖g4 ♜f1 5. ♖g3 ♜e2 6. ♖f4 ♜e1 7. ♖f3 ♜d2 8. ♖e4 ♜d1 9. ♖e3 ♜c2 10. ♖d4 ♜c1 11. ♖d3 ♜b2 12. ♖c4 ♜a1. Наконец черный король в углу. Теперь белые подталкивают его поближе к своему собственному предводителю. 13. ♖b4 ♜a2 14. ♖d4! ♜b1 15. ♖c3! ♜a2 16. ♖c1! ♜b3 17. ♖d2 ♜c4 18. ♖e3 ♜b4 19. ♖d3 ♜a4 20. ♖b5+ ♜a3 21. ♖b1! ♜a4 22. ♖b2 ♜a5 23. ♖a3×. Как видим, белому ферзю пришлось проявить немало изобретательности, чтобы справиться с черным королем.

Головоломка довольно занята, но с точки зрения шахматиста имеет один дефект: в нормальной игре королю не запрещено ходить, и, стало быть, она несколько искусственна. Однако профессор из Австрии И.Галумбирек придумал одну необычную конструкцию, где идея «неприкасаемости» реализуется при полном соблюдении шахматного кодекса.

Клубок фигур на рисунке 3 зафиксирован, а вот белому ферзю и черному королю разрешается находиться всюду, где им заблагорассудится. Итак, королю белых не запрещено двигаться (формальных ограничений нет), но он сам не может позволить себе такую роскошь: после ♜c2(e2) d1 ♖+ черные фигуры вырываются на свободу.

В следующей задаче, как и во всех родственных ей, ферзь загоняет неприятельского короля на

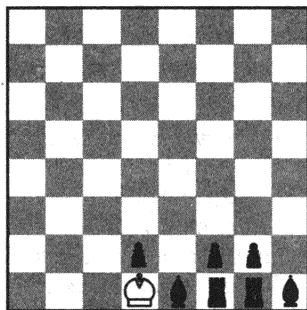


Рис.3. Клубок фигур завязан

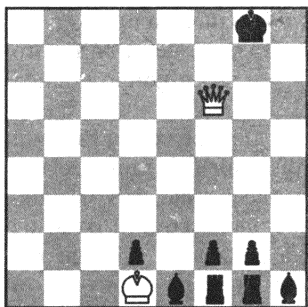


Рис. 4. Мат в 17 ходов

поле h2, после чего следует ♔ h4×.

1. ♔ e7! ♚ h8 2. ♔ g5 ♚ h7 3. ♔ e5! ♚ g8 4. ♔ f6 ♚ h7 5. ♔ f8 ♚ g6 6. ♔ e7 ♚ f5 7. ♔ d6 ♚ e4 8. ♔ c5 ♚ d3 9. ♔ b4 ♚ e3 10. ♔ c4 ♚ f3 11. ♔ d4 ♚ g3 12. ♔ e4 ♚ h3 13. ♔ e6+! ♚ g3 14. ♔ f5 ♚ h4 15. ♔ g6 ♚ h3 16. ♔ g5 ♚ h2 17. ♔ h4×.

Компьютер доказал, что если черный король находится вне квадрата a1, a2, b1, b2, то ферзь загоняет его на критическое поле h2 и ставит мат не позднее 32-го хода; если же королю удастся прорваться в левый нижний угол доски, то из этой крепости его не выманить.

На доске находятся два белых ферзя и черный король. За сколько ходов белые могут поставить мат?

Каковы бы ни были размеры доски и где бы вначале ни стояли фигуры, мат дается не позднее четвертого хода. Первым

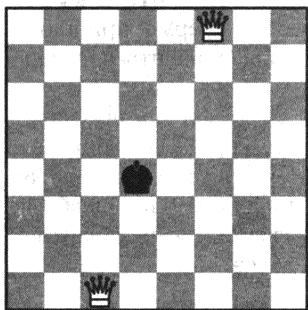


Рис. 5. Мат неизбежен

ходом один из ферзей объявляет шах, скажем, по вертикали. В ответ на отступление короля на одну из соседних линий вторым ходом другой ферзь, с помощью первого зажимает короля на двух вертикалях (рис.5).

Теперь на любое движение короля следует горизонтальный шах и мат следующим ходом, например: 2... ♚ e4 3. ♔ c4+ ♚ e5 (e3) 4. ♔ ff4×.

Головоломки о маршрутах по доске интересны для всех фигур, а не только для коня.

За какое наименьшее число ходов ферзь может обойти всю доску (останавливаясь на каждом поле необязательно)?

Открытый маршрут на рисунке 6,а состоит из 15 ходов. Но если разрешить ферзю пробегать мимо некоторых полей дважды, то один ход можно сэкономить (рис.6,б). Этот 14-ходовый маршрут замкнут и, как и все кратчайшие, самопересекается.

Какой геометрически самый длинный несамопересекающийся путь может сделать ферзь за пять ходов, начиная с d1?

Искомый путь ферзя показан на рисунке 7,а. Решающие эту

Задача о ферзях-часовых. Около каждой тюремной камеры можно поставить часового. Находясь у одной из них, часовой видит, что происходит в других, от которых к данной ведут коридоры. Какое наименьшее число часовых требуется для наблюдения за всеми камерами?

Если шахматную доску рассматривать как тюрьму (да простят нам шахматисты такую аналогию), причем ее поля считать камерами, а вертикали, горизонтали и диагонали – коридорами, то часовыми естественнее всего назначить ферзей, которые ведут наблюдение во всех направлениях. При этом задача о часовых приобретает следующую шахматную формулировку.

Какое наименьшее число ферзей достаточно расставить на доске так, чтобы они контролировали все ее свободные поля?

Оказывается, пять ферзей вполне способны справиться с шахматной «тюрьмой», а четырех уже недостаточно – по меньшей мере два поля останутся без присмотра. Например, при ферзях на a2, b6, e1 и f5 не атакованы поля g7 и h8. Эта расстановка, в которой ферзи образуют квадрат, интересна еще и тем, что достаточно добавить к ней всего одну пешку g7, чтобы все свободные поля попали под удар. Доказано, что всего имеется 4860 пяти ферзей-часовых. На рисунке 9,а ферзи-часовые держат все свободные поля доски, но сами друг за

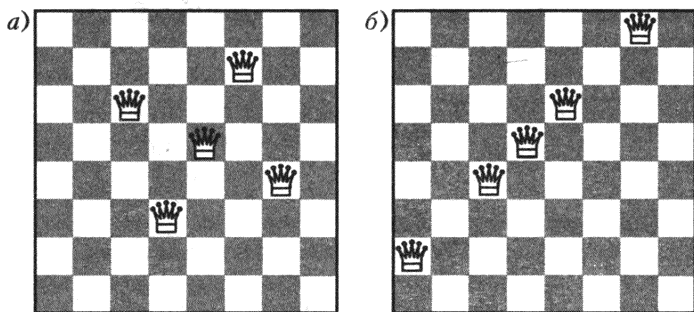


Рис.9. Пять ферзей-часовых

другом не следят. А на рисунке 9,б они стоят на одной диагонали и, значит, охраняют всю доску, включая поля, занятые ими.

Однако четырех ферзей для полного контроля за доской уже недостаточно – по меньшей мере два поля остаются без присмотра.

С увеличением размеров доски необходимое число ферзей-часовых, естественно, увеличивается. Любопытно, однако, что пяти ферзей хватает и для контроля над всеми свободными

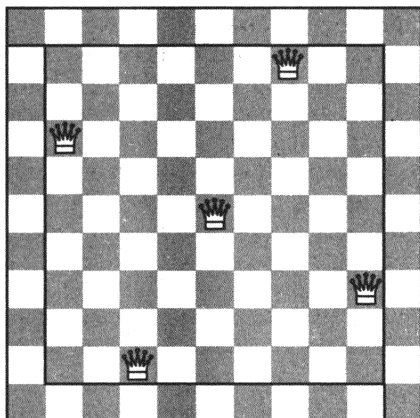


Рис.10. Ферзи-часовые на трех разных досках

полями на досках 9×9 , 10×10 и даже 11×11 . На рисунке 10 расположение ферзей показано сразу для трех этих досок. Внутренний квадрат – доска 9×9 ; квадрат, который получается при отрезании верхней горизонтали и правой вертикали, – доска 10×10 ; наконец, внешний квадрат – доска 11×11 .

В общем случае для доски $n \times n$ задача сложная, и получены лишь оценки для наименьшего числа $p(n)$ ферзей-часовых, охраняющих все ее свободные поля:

$$n/2 - 1/2 \leq p(n) \leq 5n/8 + 16\sqrt{n}.$$

Расставьте на доске восемь ферзей так, чтобы вне их контроля оказалось наибольшее число полей.

В этой старинной задаче, наоборот, ферзей требуется поставить так неуклюже, чтобы больше полей оказалось в безопасности. Искомое число равно 11, на рисунке 11 свободные поля помечены точками. Всего существует семь принципиально разных видов расстановок, удовлетворяющих условию задачи.

Расставьте наибольшее число ферзей-часовых, чтобы при снятии любого из них на доске появлялось одно безопасное поле.

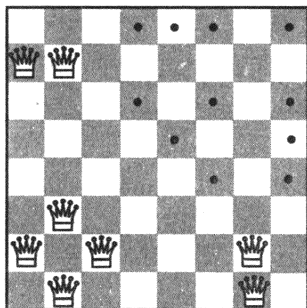


Рис.11 На доске 11 безопасных полей

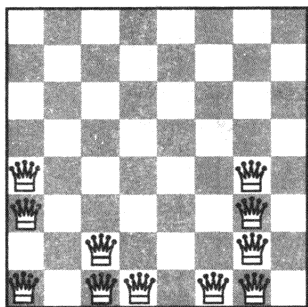


Рис.12. Рекорд с 11 ферзями

Эту головоломку связывает с предыдущей общий ответ — 11 ферзей (рис.12).

Какое наименьшее число ферзей достаточно расставить на доске $n \times n$ так, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стоял хотя бы один из них?

Убедимся, что при четных n достаточно $2n$ ферзей (в частности, 16 на шахматной доске 8×8 — рис.13,а), а при нечетных — $2n + 1$ ферзей (19 на доске 9×9 — рис.13,б). При четных n на каждой из помеченных линий (рис.13,а) должен стоять ферзь. Всего отрезков $2n$, столько и нужно ферзей.

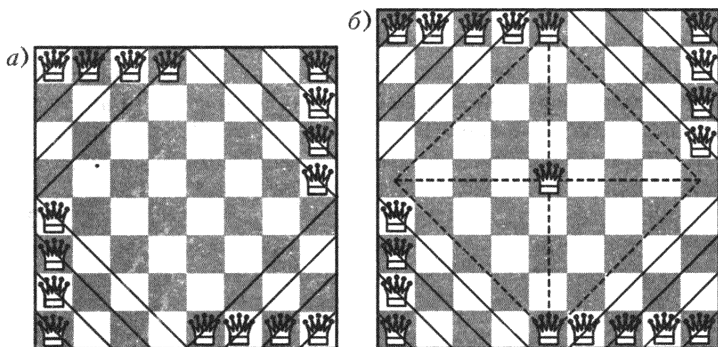


Рис.13. На каждой линии ферзь

Рассмотрим случай нечетного n (рис.13,б). На каждом из сплошных отрезков, расположенных вне пунктирного квадрата, должен стоять ферзь, таких отрезков $2n - 2$. На каждом из пунктирных отрезков тоже должен стоять ферзь. Для этого придется добавить еще трех ферзей: если ограничиться двумя, то их надо поставить в противоположные вершины пунктирного квадрата, но тогда останется свободной его диагональ (пятая горизонталь доски 9×9). Итого, нужно $2n + 1$ ферзей.

Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске, если поле e4 запрещено и никакие два не могут стоять на полях, симметричных относительно этого поля?

Все поля кроме первой вертикали, последней горизонтали и самого поля е4 можно разбить на пары, симметричные относительно е4, таких пар 24. По условию, на полях каждой пары стоит не более одного ферзя. Кроме того, ими можно заполнить всю первую вертикаль и последнюю горизонталь, всего 15 полей. Поле е4 запрещено, и получаем 39 ферзей (рис.14).

Самой популярной задаче о ферзях посвящена следующая глава.

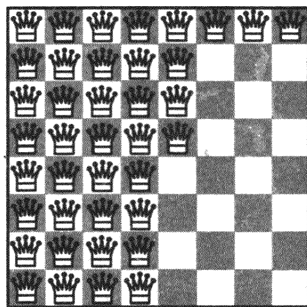


Рис.14. На доске 39 «несимметричных» ферзей

ЗАДАЧА ГАУССА О ВОСЬМИ ФЕРЗЯХ

Задача о восьми ферзях, наряду с задачей о ходе коня, – одна из самых популярных в шахматной математике.

Сколькими способами можно расставить на доске восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу, т. е. никакие два не стояли на одной вертикали, горизонтали и диагонали?

Если задачей о ходе коня занимался Леонард Эйлер, то задача о восьми ферзях в середине XIX века привлекла внимание другого великого математика – Карла Гаусса.

Конечно, в шахматах фигуры одного цвета не угрожают друг другу (нападают, находятся под ударом, атакуют, бьют и т.д.), и здесь имеется в виду лишь то, что поля, на которых они стоят, связаны между собой ходом данных фигур. Сами фигуры для удобства мы иногда называем «мирными».

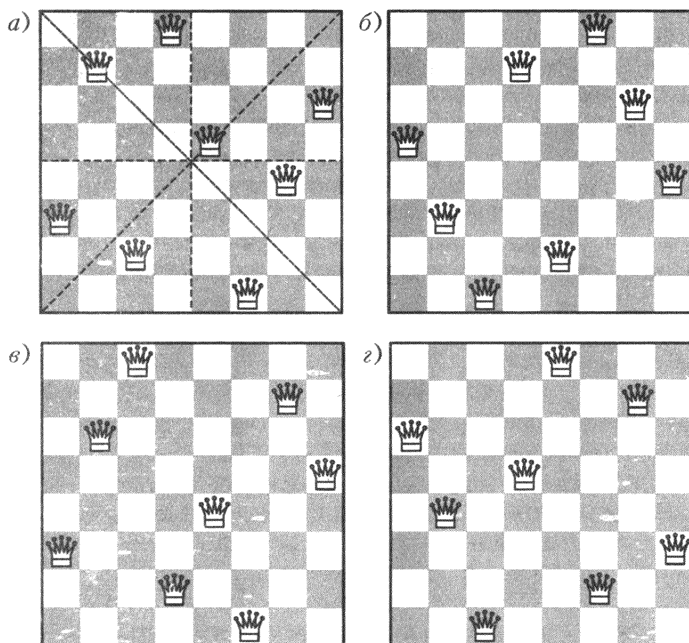


Рис 1 Задача о восьми ферзях

Очевидно, больше восьми ферзей расставить на обычной доске невозможно (хотя бы на одной вертикали и горизонтали их окажется не меньше двух). А найти то или иное расположение несложно, на рисунках 1,а–г представлены четыре расстановки мирных ферзей.

Гораздо труднее подсчитать общее число решений, в чем собственно и состоит задача. Любопытно, что многие авторы приписывают ее самому Гауссу. На самом деле, задача была поставлена в 1848 г. немецким шахматистом М.Беццелем. Доктор Ф.Наук обнаружил 60 решений и опубликовал их в газете *Illustrierte Zeitung* спустя два года. Лишь после этого Гаусс заинтересовался задачей и нашел 72 решения, которые сообщил в письме к своему другу астроному Шумахеру. Полный же набор, состоящий из 92 расстановок, получил все тот же Наук. Он привел их в упомянутой газете в конце 1850 г. А строгое доказательство, что 92 – искомое число решений, было получено лишь в 1874 г. английским математиком Д.Глэшером. Однако забегая вперед, заметим, что число основных решений составляет только двенадцать. Остальные получаются из них при помощи поворотов и отражений доски.

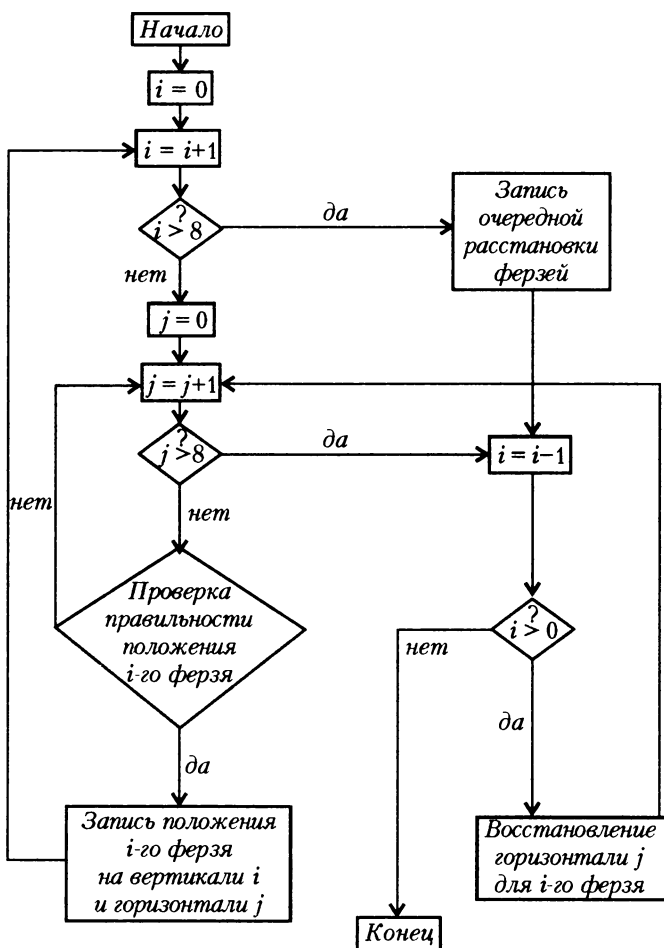
В наш компьютерный век эта задача не представляет больших сложностей. Достаточно составить программу, и сразу после ее введения в машину все необходимые позиции будут найдены. Надо сказать, что эта головоломка содержится во многих учебниках по программированию, так как служит хорошим примером для создания алгоритма решения переборной задачи. Его можно записать в удобной и компактной форме.

Общая идея поиска расстановок такова. Первого ферзя ставим на какое-нибудь поле вертикали «а»; второго – на вертикали «b», но чтобы он не нападал на первого; третьего – на вертикали «с», чтобы он не угрожал первым двум, и т.д. Так продолжаем до тех пор, пока восьмой, последний ферзь не займет свое место на вертикали «h». Если в какой-то момент не найдется свободного места для ферзя на следующей вертикали, делаем шаг назад – переставляем ферзя предыдущей вертикали на другое поле и снова идем вперед. Если и эта попытка не увенчается успехом, отступаем еще на одну вертикаль назад и т.д. Найдя одну из расстановок, удаляем последнего ферзя, а для седьмого ищем новое место на вертикали «g». Дальше в зависимости от обстоятельств продвигаемся вперед или назад по той же схеме. Конечно, иногда придется переставлять и самого первого ферзя на вертикали «а». Поменяв его место, вновь идем вперед. В конце концов возникнет ситуация, когда мы не сумеем

найти ни одной новой расстановки. Работа алгоритма закончена, все решения получены, попутно найдено их число.

Нашим рассуждениям можно придать более строгий, математический вид. Заметим, что в них были использованы три вида движения: «вперед», когда закреплено положение i -го ферзя и мы переходим к $(i + 1)$ -му; «вбок» – в процессе нахождения места для этого $(i + 1)$ -го; наконец, «назад» – если поставить $(i + 1)$ -го ферзя не удастся и надо менять место i -го.

Таблица 1
Блок-схема алгоритма решения задачи о восьми ферзях



Блок-схема реального алгоритма решения задачи о восьми ферзях представлена в таблице 1. Здесь через i обозначен номер очередной вертикали, а через j – номер горизонтали для ферзя i -й вертикали ($i, j = 1, 2, \dots, 8$).

Среди 92 расстановок можно выделить 12 основных, которые не переходят друг в друга при поворотах и зеркальных отражений доски, а любая другая возникает из какой-то основной при помощи этих преобразований. Вот один из наборов основных расстановок:

- 1) рис.1,а;
- 2) рис.1,б;
- 3) а4, б1, с5, d8, е6, f3, g7, h2;
- 4) а4, б2, с5, d8, е6, f1, g3, h7;
- 5) а4, б2, с7, d3, е6, f8, g1, h5;
- 6) а4, б2, с7, d3, е6, f8, g5, h1;
- 7) а3, б5, с2, d8, е6, f4, g7, h1;
- 8) а4, б1, с5, d8, е2, f7, g3, h6;
- 9) а4, б7, с3, d8, е2, f5, g1, h6;
- 10) а6, б4, с2, d8, е5, f7, g1, h3;
- 11) а4, б8, с1, d5, е7, f2, g6, h3;
- 12) а4, б2, с7, d5, е1, f8, g6, h3.

Остальные 80 получаются из этих 12 при помощи поворотов и отражений доски¹. Например, из расстановки на рисунке 1,а при повороте доски по часовой стрелке на 90° возникает расстановка на рисунке 1,в, а при зеркальном отражении (относительно вертикальной линии, разделяющей фланги) – на рисунке 1,г. Новые повороты и отражения (относительно других линий) дают еще пять решений, а всего с учетом исходной – восемь.

Аналогично, другие основные расстановки тоже порождают восемь решений, исключение – на рисунке 1,б, эта расстановка дает только одну новую при повороте доски и две при отражении, итого четыре. Итак, всего имеем $11 \times 8 + 1 \times 4 = 92$ расстановки восьми ферзей, не угрожающих друг другу.

Расстановка мирных ферзей обладает теми или иными свойствами. Скажем, в первой расстановке из указанного набора никакие три ферзя не стоят на одной прямой, проведенной через центры полей (имеются в виду не только параллельные вертикалям, горизонталям и диагоналям доски, но и прямые с любыми

¹ Мы пользуемся здесь традиционной терминологией. Конечно, система координат на доске фиксирована, и точнее было бы говорить о поворотах и отражениях не доски, а тех или иных позиций на ней.

углами наклона): у второй отсутствуют ферзи в центре доски (квадрате 4×4) и на главных диагоналях, и т.д.

Всякое решение задачи о восьми ферзях можно записать как набор (t_1, t_2, \dots, t_8) , представляющий собой перестановку чисел $1, 2, \dots, 8$. Здесь t_i – номер горизонтали, на которой стоит ферзь i -й вертикали. Так как никакие два ферзя не находятся на одной горизонтали и диагонали, то, с одной стороны, все числа t_i различны, а с другой, для любых i, j ($i < j \leq 8$) имеем: $|t_i - t_j| \neq j - i$.

Возьмем две перестановки $(1, 2, \dots, 8)$ и $(8, 7, \dots, 1)$ и сложим числа каждой из них с числами произвольной другой, например $(3, 7, 2, 8, 5, 1, 4, 6)$:

$$\begin{array}{r} + 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ + 3, 7, 2, 8, 5, 1, 4, 6 \\ \hline 4, 9, 5, 12, 10, 7, 11, 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \\ + 3, 7, 2, 8, 5, 1, 4, 6 \\ \hline 11, 14, 8, 13, 9, 4, 6, 7 \end{array}$$

Полученные суммы образуют два набора: $(4, 9, 5, 12, 10, 7, 11, 14)$ и $(11, 14, 8, 13, 9, 4, 6, 7)$. Возникает следующая задача.

Какие перестановки чисел от 1 до 8 дают в результате указанного сложения два набора, в каждом из которых все элементы различны?

Задача о восьми ферзях заинтересовала Гаусса именно в связи с этой арифметической проблемой. Оказывается, между решениями шахматно-комбинаторной и числовой задач имеется взаимно однозначное соответствие: каждая расстановка восьми мирных ферзей дает решение арифметической задачи, и наоборот. Для выбранной перестановки оба набора состоят из восьми разных чисел, и это не случайно – она соответствует первой основной расстановке ферзей (см. рис.1,а).

В математической литературе – и серьезной, и занимательной – популярной является более общая задача о ферзях.

Задача об n ферзях. *Расставьте n ферзей на доске $n \times n$ так, чтобы они не угрожали друг другу.*

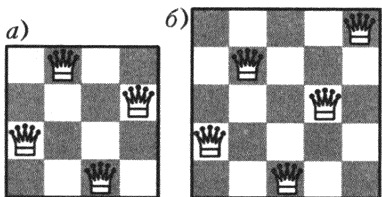


Рис.2. Мирные ферзи на досках 4×4 и 5×5

На доске 1×1 ферзь ставится на одно-единственное поле, и для $n = 1$ задача решена. На доске 2×2 один ферзь держит под обстрелом все остальные поля, на доске 3×3 умещаются только два мирных ферзя. Итак, для $n =$

$= 2, 3$ задача не имеет решения. Эти два случая представляют собой исключение, а для всех $n > 3$ удается расставить n мирных ферзей на доске $n \times n$. На рисунке 2а, б показаны необходимые расстановки на досках 4×4 и 5×5 .

Опишем одну из возможных схем расположения n ферзей, не угрожающих друг другу, на доске $n \times n$ при $n \geq 6$. Для этого рассмотрим отдельно три случая.

1) Пусть n четно. Тогда его можно представить в одном из трех видов: $n = 6k$, $n = 6k + 2$ и $n = 6k + 4$, где $k \geq 1$. Для $n = 6k$,

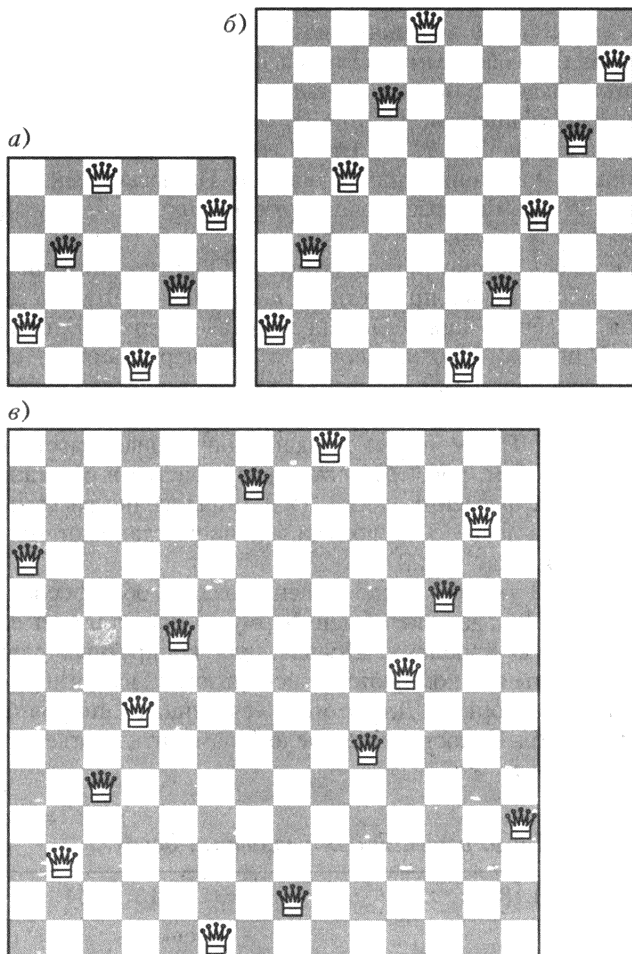


Рис.3 Задача об n ферзях

$6k + 4$ расположим одну половину ферзей на $n/2$ левых вертикалях доски ходом коня, начиная со второй горизонтали, а вторую половину – тем же способом на $n/2$ правых вертикалях, начиная с первой горизонтали. Расстановки на досках 6×6 и 10×10 , полученные таким способом, показаны на рисунке 3а, б. (В главе 16 на рисунке 8 дана другая расстановка, обладающая одним особым свойством).

2) Для досок $n = 6k + 2$ этот способ не годится, и будем действовать иначе. Расположим ферзей ходом коня со второй вертикали по $(n/2 - 2)$ -ю, начиная с третьей горизонтали, и далее с $(n/2 + 3)$ -й вертикали по $(n - 1)$ -ю, начиная с шестой горизонтали. Свободными остаются шесть вертикалей и шесть горизонталей доски, и ферзей надо поставить на поля со следующими координатами: $(1, n - 3)$; $(n/2 - 1, 1)$; $(n/2, n - 1)$; $(n/2 + 1, 2)$; $(n/2 + 2, n)$; $(n, 4)$. При $n = 14$ ($k = 2$) имеем расстановку, показанную на рисунке 3,в. На доске 8×8 ($k = 1$) расстановка восьми ферзей совпадает с рисунком 1,б, но уловить закономерность трудно.

3) Осталось рассмотреть нечетные n . Обратим внимание, что во всех расстановках при четных n главная диагональ доски (идущая из левого нижнего угла в правый верхний) остается пустой. Учитывая это, на первых $n - 1$ вертикалях и $n - 1$ горизонталях поставим $n - 1$ ферзя, как это положено на четной доске (число $n - 1$ четно), а затем n -го разместим в правом верхнем углу. Таким приемом наша популярная расстановка восьми ферзей (см. рис.1,б) легко превращается в расстановку девяти мирных ферзей на доске 9×9 (аналогично расстановка пяти ферзей на доске 5×5 получилась из расстановки четырех на доске 4×4 – см. рис.2).

В таблице 2 указано число решений задачи об n ферзях для n от 1 до 12. Нахождение общей формулы представляет собой весьма сложную проблему. Правда, для конкретных случаев можно обратиться к компьютеру, используя, например, описанный выше алгоритм. Для этого в «счетчиках» циклов блок-схемы (см. табл.1) достаточно число 8 заменить соответствующим значением n .

Таблица 2

Число решений для различных досок

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число решений	1	0	0	2	10	4	40	92	352	724	2680	14200

При упомянутых выше преобразованиях доски в общем случае – n мирных ферзей на доске $n \times n$ – возможны три варианта: 1) три поворота на 90° и четыре отражения приводят к семи новым расстановкам (а всего получаем восемь), исходная позиция – простая; 2) при одном повороте возникает новая расстановка, отражения дают еще две, исходная позиция – симметрическая; 3) при одном отражении получается новая расстановка, а повороты и другие отражения новых расстановок не дают, исходная позиция – дважды симметрическая. Для обычной доски каждая расстановка либо простая, либо симметрическая, дважды симметрических нет.

Заметим, что если рассматривать произвольные расстановки ферзей (не обязательно мирных), то возможны и трижды симметрические позиции: никакие их преобразования ничего нового не дают. Возьмем, например, симметричную расстановку восьми ферзей на доске 8×8 (рис.4). Очевидно, при любых поворотах и отражениях доски она всегда остается на месте (в классической задаче такие расстановки тоже отсутствуют).

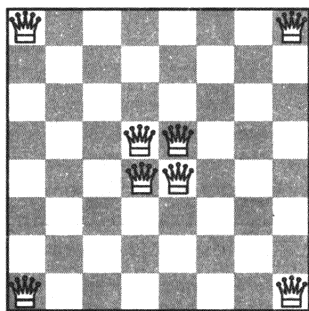


Рис.4. Расстановка сохраняется при любых преобразованиях доски

Итак, при переходе к доскам $n \times n$ расстановки ферзей могут обладать новыми свойствами. Так, на доске 4×4 имеется всего одна основная расстановка, причем дважды симметрическая (см. рис.2,а), а всего – две. На доске 5×5 основных расстановок две (на рисунке 2,б показана одна из них), а общее число равно десяти, причем из них можно выбрать пять таких, при наложении которых друг на друга 25 ферзей заполняют все поля доски.

В общем случае доказано, что n расстановок ферзей при наложении друг на друга могут заполнить всю доску $n \times n$ только при n не кратных 2 и 3. Из этого, в частности, следует, что на стандартной доске подобрать восемь расстановок, заполняющих все 64 поля доски, невозможно.

Обобщая арифметическое свойство решений задачи о восьми ферзях, получаем, что расстановка n ферзей (t_1, t_2, \dots, t_n) на доске $n \times n$ является искомой, если для любых i, j ($i < j \leq n$) имеет место неравенство $|t_j - t_i| \neq j - i$. Таким образом, проблема n ферзей сводится к чисто математической задаче о

нахождении перестановки чисел $1, 2, \dots, n$, удовлетворяющей указанному условию. Исследования на эту тему не раз публиковались в серьезных математических журналах.

Рассмотрим еще несколько задач о расстановках ферзей.

На доске $n \times n$ ($n > 1$) расставьте $2n$ ферзей так, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло не больше двух.

На рисунке 5,а показана расстановка 16 ферзей на доске 8×8 , а на рисунке 5,б – 18 ферзей на доске 9×9 , обе они

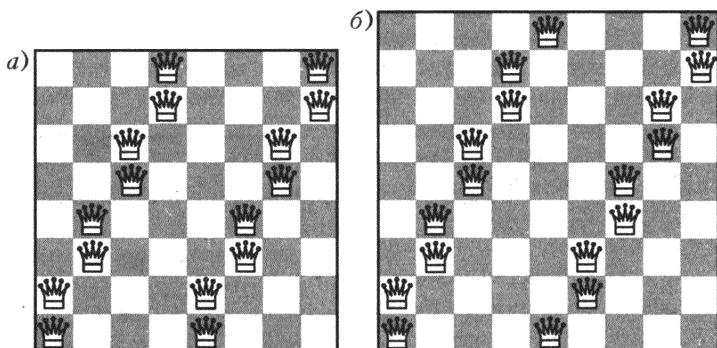


Рис.5. Задача о $2n$ ферзях

удовлетворяют условиям задачи. Первое решение легко обобщается для всех четных досок (ферзи располагаются парами), а второе – для всех нечетных (одна пара разбита).

Расставьте на обычной доске 16 ферзей так, чтобы ни на одной линии не стояло больше двух.

В отличие от задачи о восьми ферзях, здесь речь идет не об обычных линиях доски, а о любых прямых, проходящих через центры полей. Восемь мирных ферзей мы уже расставляли таким образом (см. рис.1,в).

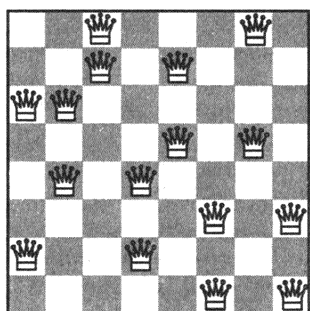


Рис.6. На каждой прямой не больше двух ферзей

Оказывается, можно уместить и вдвое больше ферзей, которые, конечно, уже не являются мирными (рис.6).

Расставьте 10 белых и 9 черных ферзей так, чтобы ни один из них не находился под ударом неприятельского.

Из известной позиции на рисунке 7,а можно получить еще одну. Для этого надо снять белого ферзя

е2 и добавить черного h5, после чего поменять цвет всех ферзей. Долгое время считалось, что существуют только эти два решения (повороты и отражения, как обычно, не в счет), причем в обоих ферзи образуют четыре «островка». Однако затем было найдено принципиально иное решение (см. рис.7,б). Здесь один белый

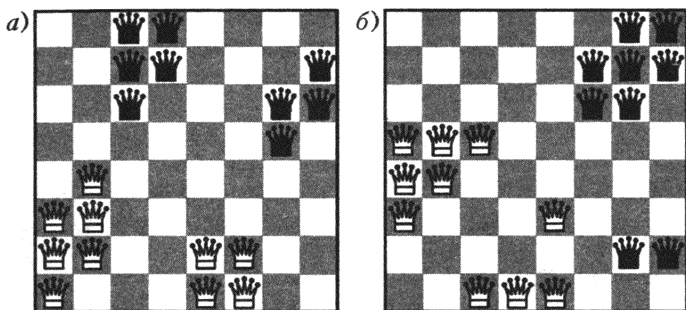


Рис.7. Ферзи разного цвета не угрожают друг другу

ферзь оторвался от связанной группы, и теперь на доске пять «островков», а не четыре. Эта расстановка уже исчерпывает все виды необходимых позиций.

Какое наибольшее число ферзей разного цвета можно расставить на доске, чтобы белые и черные не угрожали друг другу?

После предыдущей задачи эта выглядит ловушкой. Искомое число ферзей равно 43! Например, белые ставят одного ферзя на любое крайнее поле доски, а черные размещают 42 ферзя на все поля вне линий действия белого.

Весьма интересное обобщение задачи о восьми ферзях придумал американский математик С.Ким.

Расставьте на обычной доске наибольшее число ферзей так, чтобы каждый из них нападал ровно на p других.

При различных p фактически получаются разные головоломки. Условие $p = 0$ означает, что ферзи не угрожают друг другу, т.е. мы приходим к классической задаче, искомое число ферзей равно восьми (см. рис.1). Для $p = 1$ наибольшее число равно 10 (рис.8,а). На доске уместилось пять изолированных пар ферзей, каждый из которых нападает только на ферзя своей пары. Для $p = 2$ искомое число равно 14 (рис.8,б). Полное решение задачи обнаружили украинские математики С.Белый и Е.Ровенский. Они доказали, что для $p = 3$ число ферзей равно 18 (рис.8,в), для $p = 4 - 21$ (рис.8,г), а для $p > 4$ необходимых расстановок не существует.

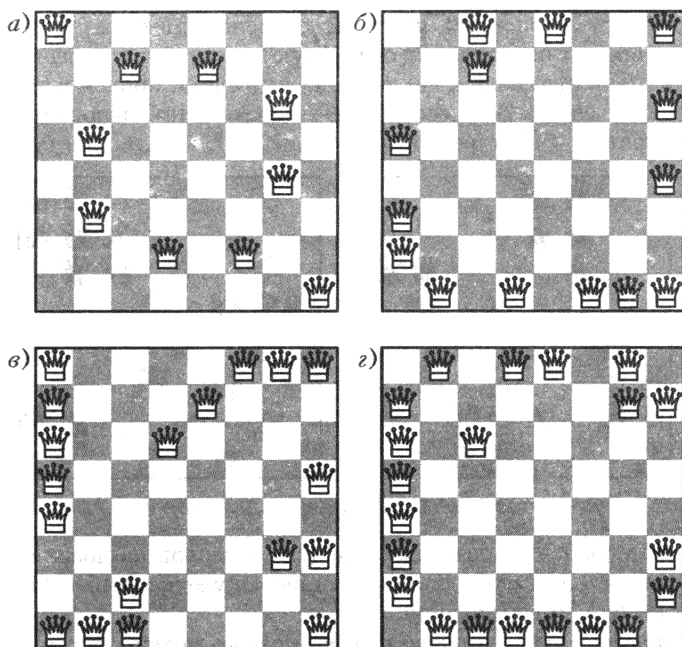


Рис.8 Задача Кима

С помощью компьютера Белый и Ровенский исследовали задачу для доски $n \times n$ при разных n и p . В результате они построили таблицу 3, где для всех $n \leq 8$ и возможных p указано наибольшее число ферзей, каждый из которых атакует ровно p других.

Столбец $p = 0$, очевидно, получается из задачи об n ферзях, строка $n = 8$ ($1 \leq p \leq 4$) проиллюстрирована на рисунке 8. Вот

Таблица 3
Число расстановок ферзей для различных n и p

$n \backslash p$	0	1	2	3	4
2	1	2	3	4	
3	2	2	4	6	
4	4	4	6	8	8
5	5	4	8	10	11
6	6	8	10	12	15
7	7	8	12	14	18
8	8	10	14	18	21

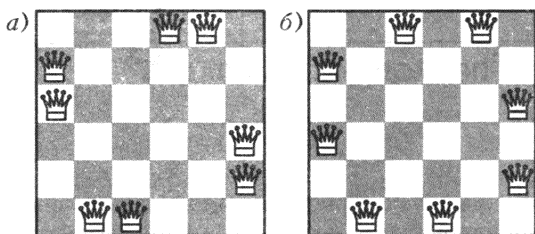


Рис 9. Ферзи разбились на пары

еще один случай: $n = 6$, $p = 1$; здесь имеются две основные расстановки наибольшего числа ферзей – восьми, обе показаны на рисунке 9, а, б. Число необходимых расстановок найдено для всех элементов таблицы 3.

И в заключение еще одно занятное обобщение.

Можно ли расставить ферзей на бесконечной доске так, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стоял ровно один из них?

Как ни странно, ответ положительный. Поставим первого ферзя произвольно. Следующие восемь расположим так, чтобы они держали под обстрелом две соседние с этим ферзем вертикали, две горизонтали и две диагонали обоих направлений и при этом не угрожали друг другу. О выполнении второго условия, конечно, надо позаботиться, ставя ферзей на соответствующие линии достаточно далеко. Например, первого из восьмерки – на расстояние 10 полей от исходного, второго – на расстояние 100 полей, третьего на расстояние 1000 полей, и т.д.

Следующую группу восьми ферзей расставим так, чтобы они держали под обстрелом следующие восемь линий (опять две вертикали, две горизонтальных и диагонали двух видов) и тоже не били друг друга. (Если какая-то линия контролируется каким-то из ранее поставленных ферзей, то в новой группе их будет не восемь, а меньше.) Продолжая этот процесс, получим необходимую расстановку ферзей на бесконечной доске.

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ЛАДЬЯ

Ладья – строгая, прямолинейная фигура – не случайно популярна не только в шахматной математике, но и в серьезной математической литературе. Что общего, скажем, между шахматным термином «ладья» и математическим «многочлен»? Однако в книгах по комбинаторному анализу постоянно используется выражение «ладейный многочлен». Оказывается, большой класс комбинаторных задач сводится к подсчету числа тех или иных расстановок ладей на шахматной доске. При этом существенную роль играет многочлен

$$r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_kx^k + \dots + r_nx^n,$$

где r_k – число расстановок k ладей, не угрожающих друг другу на доске $n \times n$ ($k \leq n$). Этот многочлен и называется ладейным, он возникает при решении многих задач по комбинаторике, теории чисел, теории групп.

Вот пример, когда ладья со своими четкими траекториями применяется в качестве модели важной комбинаторной задачи.

Пусть требуется назначить n рабочих на n различных работ, причем каждая работа должна выполняться одним рабочим. Сколькими способами можно произвести такое назначение?

Это известная в прикладной математике задача о назначениях. Поставим в соответствие рабочим горизонтали доски $n \times n$, а работам – ее вертикали. Если i -й рабочий назначен на j -ю работу, то на пересечении горизонтали i и вертикали j расположим ладью. Так как каждая работа выполняется одним рабочим и каждый рабочий назначается на одну работу, все вертикали и горизонтали будут содержать по одной ладье, т.е. ладьи не угрожают друг другу. Итак, математической задаче можно придать шахматную формулировку.

Сколькими способами можно расставить n не угрожающих друг другу ладей на доске $n \times n$?

Фактически здесь при любом фиксированном n требуется найти коэффициент r_n ладейного многочлена. Прежде чем провести вычисления, заметим, что при любом расположении на доске $n \times n$ больше чем n ладей найдется хотя бы одна вертикаль (и одна горизонталь) с двумя или более ладьями, т.е. $n -$

наибольшее число «мирных» ладей. На рисунке 1 представлена одна из расстановок восьми ладей на обычной доске.

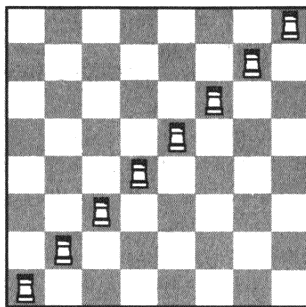


Рис.1 Восемь мирных ладей

Выясним теперь, сколько всего существует расстановок. На первую вертикаль можно произвольно поставить одну из n ладей, затем на вторую — одну из $(n - 1)$ оставшихся, причем горизонталь, занятая первой, исключается, на третью — одну из $(n - 2)$ оставшихся и т.д., вплоть до $(n - 1)$ -й вертикали, на которой имеется выбор из двух возможностей, и последней, n -й, с единственным свободным полем.

Комбинируя n расположений ладьи на первой вертикали с $(n - 1)$ — на второй, $(n - 2)$ — на третьей и т.д., получаем $n(n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ различных вариантов. Это число $n!$ и является искомым. В частности, на обычной доске восемь ладей, не угрожающих друг другу, можно расположить $8! = 40320$ способами.

Итак, существует $n!$ назначений n рабочих на n работ. Пусть выбрано назначение, соответствующее рисунку 1, т.е. i -й рабочий назначен на i -ю работу, и требуется сделать новое назначение с учетом того, что каждый рабочий хочет поменять свою предыдущую работу. Сколько существует таких назначений? И эта задача имеет ладейную формулировку.

Сколькими способами на доске $n \times n$ можно расставить n не угрожающих друг другу ладей так, чтобы ни одна из них не стояла на главной диагонали (для обычной доски — диагонали a1-h8)?

Дополнительное условие значительно усложняет дело. Даже Эйлеру не удалось найти общую формулу для числа A_n необходимых расстановок. Правда, он вывел рекуррентное соотношение $A_n = (n - 1)(A_{n-1} + A_{n-2})$, с помощью которого последовательно определяются значения A_n для любого $n \geq 3$ ($A_1 = 0$, $A_2 = 1$). Позднее все-таки была найдена формула для A_n , которая имеет следующий вид:

$$A_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Для $n = 8$ получаем $A_8 = 14833$, т.е. число расстановок восьми ладей и, соответственно, назначений рабочих уменьшается почти втрое.

Сколькими способами можно расставить восемь ладей на черных полях доски так, чтобы они не угрожали друг другу?

Перекрасим мысленно все черные поля в два цвета – красные и синий. При этом черные поля нечетных вертикалей сделаем красными, а четных – синими. В результате из восьми мирных ладей, стоящих на черных полях, четыре окажутся на красных полях, а остальные четыре – на синих.

Красные поля образуют как бы отдельную доску 4×4 , поэтому число расстановок четырех мирных ладей на них равно $4! = 24$. То же можно сказать и о синих полях. Значит, число всех необходимых расстановок равно 24^2 .

На доске стоят восемь ладей, не угрожающих друг другу. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых (расстояние измеряется между центрами полей, на которых расположены лады).

Рассмотрим семь пар ладей, стоящих на соседних вертикалях. Разности координат по вертикали у этих пар равны одному из чисел от 1 до 7, поэтому либо две из них равны (и тогда расстояния в соответствующих парах ладей совпадают), либо среди них содержатся все числа от 1 до 7. В частности, есть две лады, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали (и на 1 по горизонтали) – пара *A*. Аналогично, на соседних горизонталях либо найдутся две пары ладей с равным расстоянием, либо есть две лады, отстоящие друг от друга на 2 по горизонтали (и на 1 по вертикали) – пара *B*. Тогда расстояния между ладьями в парах *A* и *B* равны $\sqrt{5}$, т.е. одинаковые, а сами эти пары различны.

Опытные читатели, конечно, поняли, что эта задача на тему принципа Дирихле: если в n клетках сидит $n + 1$ кролик, то найдется клетка, в которой сидит не меньше двух из них.

Сколькими способами можно расставить n мирных ладей на доске $n \times n$, если k из них – белые и $n - k$ – черные?

Всякая расстановка, удовлетворяющая условиям задачи, определяется выбором n полей для n мирных ладей и затем указанием k полей из этих n , на которых будут поставлены белые лады, остальные $n - k$ полей займут черные. Таким образом, искомое число расстановок равно $n! C_n^k$ (C_n^k – число сочетаний из n элементов по k).

Займемся теперь ладьями-часовыми. Очевидно, при любой расстановке восьми мирных ладей (например, как на рисунке 1) все свободные поля доски будут находиться под обстрелом. Действительно, если какое-то поле оказалось вне контроля, то на его вертикали отсутствует ладья, и, значит, восемь ладей зани-

мают не больше семи вертикалей, и хотя бы на одной из них стоит не меньше двух – противоречие. Понятно, что для охраны всех полей доски $n \times n$ достаточно n ладей, но не меньше – в этом случае хотя бы одна вертикаль и одна горизонталь окажутся пустыми, и поле, стоящее на их пересечении, не будет атаковано.

*Сколькими способами на доске $n \times n$ можно расставить n ладей-часовых?*¹

Если n ладей охраняют доску, то либо на каждой вертикали, либо на каждой горизонтали стоит хотя бы одна из них. Действительно, если существуют вертикаль и горизонталь без ладей, то поле, находящееся на их пересечении, как мы убедились, не атаковано.

Число расстановок n ладей – по одной на каждой вертикали – равно n^n (первую ладью можно поставить на одно из n полей первой вертикали; вторую на одно из n полей второй и т.д.). Столько же имеется и расстановок по одной на каждой горизонтали. На первый взгляд кажется, что их общее число равно $n^n + n^n = 2n^n$. Однако при этом дважды учтены расстановки, в которых на каждой вертикали и на каждой горизонтали стоит по одной ладье. Но это как раз все расстановки n мирных ладей. Отсюда следует, что ответом является $2n^n - n!$. В частности, число расстановок восьми ладей, обстреливающих все поля обычной доски, равно $2 \times 8^8 - 8! = 33514112$.

Комбинаторные задачи о фигурах-часовых не менее популярны, чем о расстановках мирных фигур. В нашей книге и те, и другие рассматриваются для каждой из шахматных фигур. С математической точки зрения наиболее просто задачи решаются для ладьи, видимо, сказывается ее прямолинейность...

Пусть некоторые поля доски $n \times n$ «заминированы» так, что король не может пройти между двумя крайними вертикалями. Докажите, что тогда ладья может пройти между двумя крайними горизонталями по одним «заминированным» полям.

Будем считать, что все заминированные поля существенны, т.е. при разминировании хотя бы одного из них король прорывается с края на край (в противном случае часть полей разминировуем). Можно убедиться, что тогда всякое заминированное поле, не лежащее на границе, примыкает к двум другим заминированным полям; кроме того, на крайних вертикалях заминиро-

¹ Как обычно, здесь предполагается, что каждое поле доски либо занято фигурой, либо находится под ударом хотя бы одной из них. Иногда требуется, чтобы атакованы были все поля доски, включая занятые. Какой именно случай имеется в виду, всегда ясно из контекста.

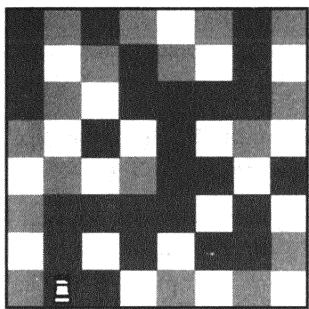


Рис.2. Ладья на «заминированной» доске

ванных полей вообще нет, а заминированные поля крайних горизонталей примыкают только к таким же полям соседних горизонталей. Это означает, что на доске имеется «мост» между крайними горизонталями, состоящий из заминированных полей (ладья сразу переходит с первой горизонтали на вторую, затем проходит несколько полей по ней, быть может 0, переходит на третью и т.д.).

На рисунке 2 заминированные поля (залиты черной краской) преграждают королю путь между крайними вертикалями. По мосту, состоящему из таких полей, ладья может пройти с первой горизонтали доски (поля b1) на последнюю (поле g8).

Снимем теперь все запреты. Итак, расставить n ладей на доске $n \times n$, чтобы они не угрожали друг другу, можно многими способами. А если допустить одну угрозу?

Какое наибольшее число ладей можно расставить на доске $n \times n$ так, чтобы каждая из них находилась под ударом не более одной из остальных?

Докажем, что это число не превышает $4n/3$. Пусть расставлено k ладей, удовлетворяющих условию. На всех занятых ими полях напишем сначала 0, а затем с каждой из n вертикалей последовательно сделаем следующую операцию. Если на ней стоят две ладьи, то к каждому из двух соответствующих чисел прибавим 1, а если стоит одна ладья, то прибавим 2. Теперь эту же операцию сделаем последовательно с каждой из n горизонталей. В результате на k полях с ладьями будет записано число 3 или 4, и сумма s всех чисел не меньше $3k$. С другой стороны, поскольку на каждой вертикали и горизонтали мы добавили не более двух единиц, s не больше $4n$. Отсюда $3k \leq s \leq 4n$, и $k \leq 4n/3$. Таким образом, наибольшее число ладей равно $[4n/3]$, причем эта оценка достижима. Так, для $n = 8$ имеем $[4n/3] = 10$, соответствующее расположение десяти ладей показано на рисунке 3,а (оно легко обобщается для любого n), причем все ладьи распределились на пять пар, и каждая угрожает только ладье своей пары.

Аналогичные рассуждения для обычной доски показывают, что и ферзей, обладающих тем же свойством — каждый под ударом не более одного, — можно расставить не более десяти. Но

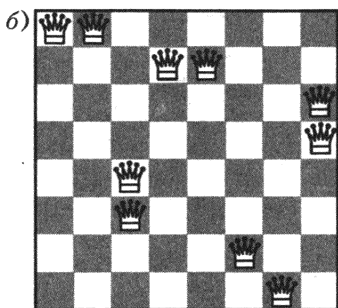
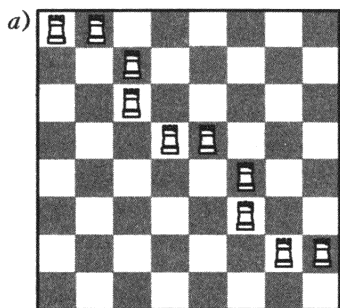


Рис.3. Пять пар ладей и ферзей

можно ли ровно десять? Заменить ладей ферзями на рисунке 3,а не удастся, многие попадают под удар сразу нескольких фигур. Но есть другой вариант – рисунок 3,б (конечно, он годится и для ладей) – здесь десять ферзей тоже разбиты на пять пар. В отличие от ладей, для ферзей задача в общем случае не решена.

На каждом поле доски записано произведение номеров ее вертикали и горизонтали. Расставьте восемь ладей, не угрожающих друг другу, чтобы сумма чисел на полях, занимаемых ими, была наибольшей.

Сумма наибольшая в том случае, если ладьи располагаются на главной диагонали (см. рис.1). Докажем это от противного. Пусть в некотором решении имеются ладьи, не стоящие на главной диагонали. Обозначим через i но-

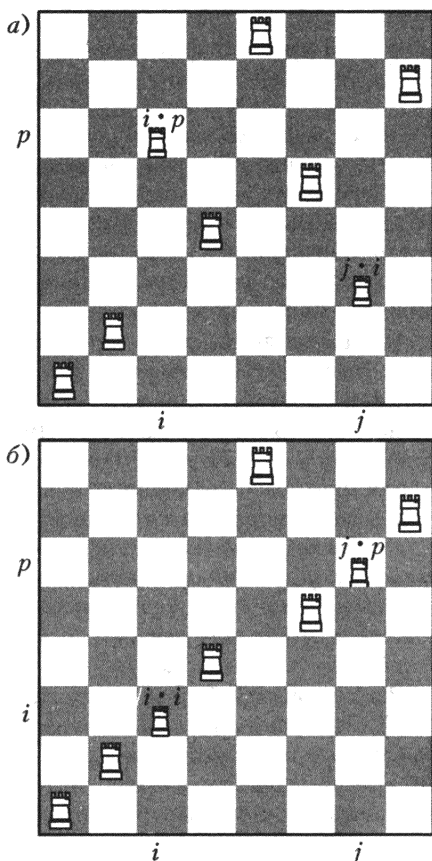


Рис.4. От перестановки ладей сумма меняется

мер первой вертикали с такой ладьей, а через p – номер соответствующей горизонтали; очевидно, $p > i$ (рис.4,а).

Пусть j – номер вертикали, на которой стоит ладья i -й горизонтали. Эта ладья также вне главной диагонали и правее первой, т.е. $j > i$. Переставим две эти ладьи – оставляя на прежних вертикалях, поменяем их горизонтали. В результате первая окажется на i -й горизонтали (диагональное поле), а вторая на p -й (рис.4,б). Ясно, что все ладьи по-прежнему не угрожают друг другу.

Для каждой расстановки подсчитаем суммы чисел для переместившихся ладей (на остальные слагаемые перестановка не влияет). Для исходной расстановки сумма равна $ip + ji$, а для новой – $i^2 + jp$. Так как $j, p > i$, имеем:

$$\begin{aligned}(i^2 + jp) - (ip + ji) &= (jp - ip) - (ji - i^2) = \\ &= p(j - i) - i(j - i) = (p - i)(j - i) > 0.\end{aligned}$$

Таким образом, во втором случае сумма больше, а это противоречит тому, что в первой расстановке она была максимальной.

На полях доски выписаны подряд числа от 1 до 64: на первой горизонтали слева направо – от 1 до 8, на второй – от 9 до 16 и т.д. Поставим восемь ладей, не угрожающих друг другу. Какие значения может принимать сумма чисел на полях, занятых ладьями?

Число, стоящее на i -й вертикали и j -й горизонтали, можно записать так: $i + 8(j - 1)$ ($i, j = 1, 2, \dots, 8$). Поскольку ладьи не угрожают друг другу, на каждой вертикали и горизонтали стоит ровно одна. Значит, искомая сумма равна $(1 + 2 + \dots + 8) + 8(0 + 1 + \dots + 7) = 260$ (магическое число!) и не зависит от конкретного расположения мирных ладей. Обе последние задачи без труда переносятся на доску $n \times n$.

На доске $n \times n$ расставлены ладьи, удовлетворяющие следующему условию: если некоторое поле свободно, то общее число ладей на одной горизонтали и одной вертикали с ним не меньше n . Докажите, что на доске находится не меньше $n^2/2$ ладей.

Рассмотрим ту из $2n$ линий, на которой стоит меньше всего ладей (если таких линий несколько, выберем любую). Пусть это горизонталь (в противном случае можно повернуть доску на 90°), и на ней стоит k ладей. Если $k \geq n/2$, то на каждой из n горизонталей не менее $n/2$ ладей, а всего не меньше $n^2/2$, и все доказано.

Пусть теперь $k < n/2$. На этой горизонтали имеется $n - k$ свободных полей, и каждая вертикаль, проходящая через такое

поле, по условию, содержит не менее $n - k$ ладей, а все вертикали вместе – не менее $(n - k)^2$ ладей. Остальные k вертикалей имеют не менее k ладей каждая (ввиду выбора k). Итак, всего на доске не менее $(n - k)^2 + k^2$ ладей. Нам осталось доказать неравенство:

$(n - k)^2 + k^2 \geq n^2/2$. Действительно:

$$\begin{aligned} (n - k)^2 + k^2 - n^2/2 &= n^2/2 - 2nk + 2k^2 = \\ &= 2(n^2/4 - nk + k^2) = 2(n/2 - k)^2 > 0. \end{aligned}$$

Если n четно, то, поставив ладьи на все одноцветные поля доски, получим расстановку, содержащую ровно $n^2/2$ ладей. Если n нечетно, то можно расставить $(n^2 + 1)/2$ ладей – на все поля того цвета, которого на доске больше.

Теперь на очереди путешествия ладьи по всем полям шахматной доски. На рисунке 5 перед вами два маршрута, открытый и замкнутый. На рисунке 5,а ладья совершает 14 поворотов, а на

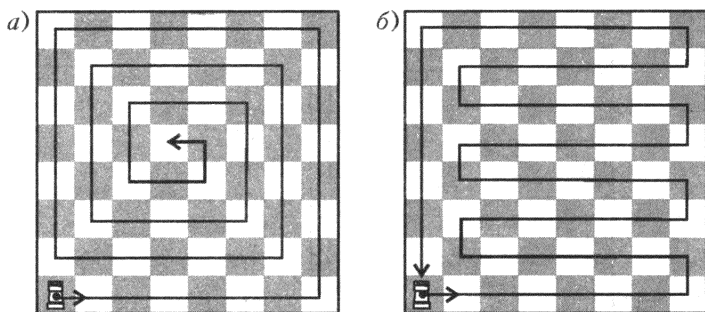


Рис 5 Маршруты ладьи по доске

рисунке 5,б – 15. Первый маршрут обобщается для любой доски $n \times n$. Что касается замкнутого маршрута, то для его существования, как и в задаче о ходе коня, необходимо, чтобы доска была четной – белые и черные поля чередуются, и их общее число четно.

Какое наименьшее число поворотов может сделать ладья при обходе всех полей доски $n \times n$?

Ладья должна пройти хотя бы один раз вдоль каждой вертикали или каждой горизонтали (если вдоль какой-то вертикали ладья не передвигалась, то каждое поле этой вертикали она проходила поперек, т.е. вдоль каждой горизонтали). Пусть ладья двигалась вдоль всех вертикалей. На любую из них, кроме, быть может, тех двух, где начинался и заканчивался

маршрут, ладья должна войти и после движения вдоль нее выйти. При этом вход и выход обязательно происходят с поворотами. Таким образом, общее число поворотов не меньше, чем $2(n - 2) + 1 + 1 = 2(n - 1)$. Для любого n маршрут, содержащий ровно столько поворотов, можно получить из рисунка 5,а; при $n = 8$ ладья делает $2(8 - 1) = 14$ поворотов. Так как число ходов в обходе доски на один больше числа поворотов, самый быстрый маршрут ладьи содержит 15 ходов. Он является открытым, а замкнутый маршрут содержит уже 16 ходов (рис.5,б).

Какое наибольшее число поворотов может сделать ладья при замкнутом маршруте по всем полям доски?

В замкнутом маршруте на рисунке 6,а ладья делает 56 поворотов. Докажем, что это и есть наибольшее число. Назовем поле коридором для данного маршрута, если на нем ладья не делает поворота. Заметим, что из каждой пары полей, смежных с угловыми, хотя бы одно является коридором – иначе на поле, соседнее с угловым по диагонали, ладья побывает дважды (рис.6,б).

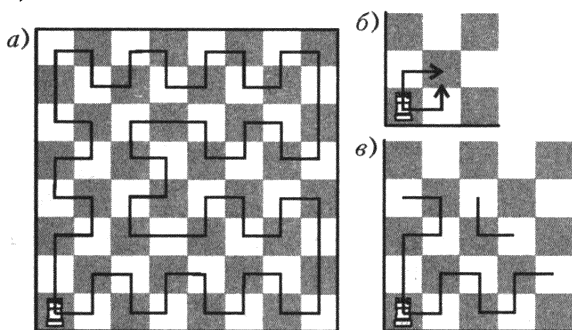


Рис.6. Поворотливая ладья

Разобьем доску на четыре квадрата 4×4 . В каждом из них есть коридор, соседний с угловым полем. Покажем, что кроме него есть еще хотя бы один коридор. Рассмотрим, например, левый нижний квадрат и допустим, что поле a_2 – коридор. Предположим, что других в этом квадрате нет. Тогда, очевидно, маршрут последовательно проходит по полям $b_2, b_1, a_1, a_2, a_3, b_3, b_4$ (рис.6,в). Следующим будет поле a_4 , иначе мы на него никогда не попадем (или маршрут не замкнется). Теперь можно продолжить маршрут в другую сторону: $b_2, c_2, c_1, d_1, d_2, e_2$. Из рисунка 6,в видно, что он содержит участок d_3, c_3, c_4 , следовательно, одно из полей – d_3 или c_4 – коридор (доказывается как для угловых полей в начале решения).

Итак, число коридоров не меньше $2 \times 4 = 8$, а число поворотов не больше $64 - 8 = 56$.

В углах доски стоят четыре ладьи. На каждом ходу ладья перемещается до упора в другую ладью или в край доски. Можно ли собрать все фигуры на четырех центральных полях?

Поначалу кажется, что задание невыполнимо – ладьи все время находятся на краю доски. И все же задача имеет решение. Вот как фигуры собираются в центре доски за 29 ходов (разумеется, за один ход ладья может пойти только по вертикали или горизонтали): ♖h8-h2, ♜a8-a2-g2, ♜h2-h8, ♜a1-a8-g8-g3, ♜g2-a2, ♜h8-a8-a3-f3, ♜g3-g8, ♜a2-a8-f8-f4, ♜f3-a3, ♜g8-a8-a4-e4, ♜h1-h8-a8-a4-d4, ♜e4-e8, ♜a3-a8-d8-d5, ♜f4-e4, ♜e8-e5, и ладьи заняли необходимые места – d4, d5, e4, e5. Может быть, кому-нибудь из читателей удастся улучшить этот рекорд?

Можно ли расставить на доске 16 белых и 16 черных ладей, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и двух главных диагоналях ладей разного цвета было поровну? Можно ли так расставить 15 белых и 15 черных ладей?

В первом случае необходимая расстановка показана на рисунке 7,а (на каждой вертикали и горизонтали стоят по две белые и черные ладьи, а на главных диагоналях – по четыре).

Второй случай сложнее, но ответ тоже положительный (рис.7,б).

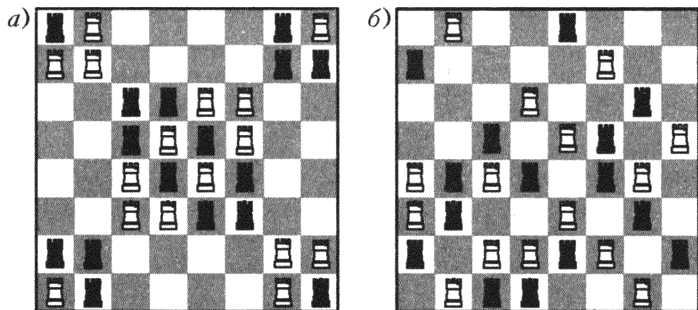


Рис 7. Белых и черных ладей всюду поровну

Здесь на вертикалях и горизонталях доски стоит по одной, две или три белые и черные ладьи, а при этом на всех диагоналях ладей тоже поровну – по одной, две, три или... 0.

На доске стоят несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в три цвета, например, красный, желтый и зеленый, так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга.

Упорядочим ладьи слева направо и снизу вверх. Первую ладью красим в красный цвет, а первую, которая нападает на

какую-то ладью, – в синий. Далее на каждом шагу очередную ладью красим так: если снизу или слева есть бьющие ее ладьи (их не больше двух), красим ее в отличный от них цвет. В конце концов все ладьи будут окрашены в три разных цвета.

Какое наибольшее число ладей трех цветов, поровну каждого, можно расставить на доске так, чтобы ладьи разного цвета не угрожали друг другу?

Ни на одной из линий не могут стоять ладьи разного цвета. Поскольку всего вертикалей и горизонталей 16, то на каждый из трех цветов приходится максимум пять линий. Итак, всего можно поставить 18 ладей (рис.8) – красных (К), синих (С) и желтых (Ж).

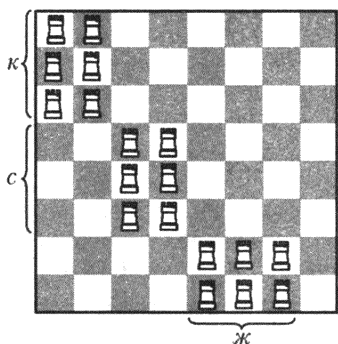


Рис.8. Разноцветные ладьи

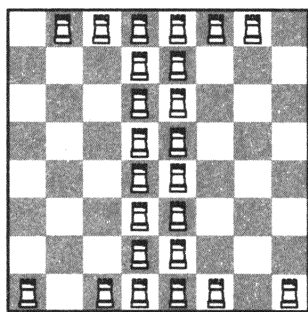


Рис. 9 Каждая ладья нападает на нечетное число других

Какое наибольшее число ладей можно расставить так, чтобы каждая из них нападала на нечетное число других?

На рисунке 9 стоят 24 ладьи, и каждая нападает на нечетное число других, больше ладей не расставить.

Какое наибольшее число ладей можно расставить так, чтобы каждая из них находилась под боем не более трех остальных?

Любой ладье на краю доски угрожает не более трех других. Пусть в какой-то расстановке, удовлетворяющей условию, есть ладья, не стоящая на краю. Вертикаль и горизонталь, на которых она находится, разбивается ею на четыре полосы, причем хотя бы одна из полос пустая (иначе ладье угрожают со всех четырех сторон). Сдвинем ладью по этой полосе на край доски. Данная расстановка тоже устраивает нас. Таким образом, все ладьи можно переставить на край. Значит, существует расстановка с максимальным числом ладей такая, что все они

стоят на краю. Но на границе доски можно поставить не более 28 ладей (рис. 10), и это число является искомым.

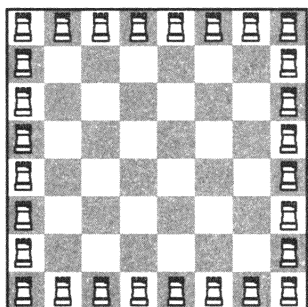


Рис.10 Каждая ладья под боем не более трех

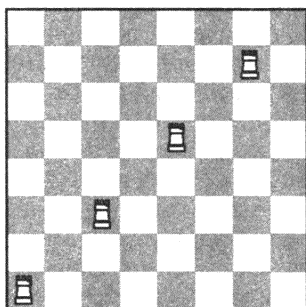


Рис.11 Все белые поля под контролем

Какое наименьшее число ладей достаточно расставить на доске $n \times n$ так, чтобы все ее белые поля оказались под боем?

Рассмотрим сначала обычную доску. Каждая ладья контролирует не более восьми белых полей (четырех по вертикали и четырех по горизонтали), поэтому на все 32 белых поля могут нападать не менее четырех ладей. Пример, когда столько ладей хватает, показан на рисунке 11. Аналогично при расстановке $\lfloor n/2 \rfloor$ ладей по всем черным полям большой диагонали доски $n \times n$ ($n/2$ при четных n или $(n+1)/2$ при нечетных n) – через одно, начиная с $a1$, все белые поля доски попадают под удар ($\lfloor a \rfloor$ означает наименьшее целое число, большее a).

Оригинальную задачу на неограниченной с двух сторон доске придумал американский математик С.Нортон (рис.12,а).

На первый взгляд выигрыш кажется невозмож-

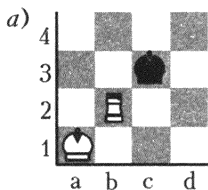
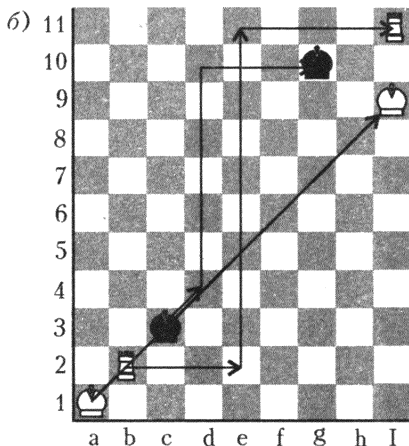


Рис.12 Выигрыш



ным, поскольку черный король убегает на север или восток. Если ладья мешает ему, то он приближается к ней, сгоняет с места, и одно из двух направлений становится свободным. И все же белые добиваются цели, причем не выпуская короля за пределы прямоугольника 9×11! План матования черного короля и траектории движения всех трех фигур показаны на рисунке 12,б.

1. ♖e2! ♜d4. После 1... ♜d3 **2. ♖e1!** черные только теряют темп по сравнению с основным вариантом. **2. ♜b2 ♜d5 3. ♜c3 ♜d6 4. ♜d4 ♜d7 5. ♖e1! ♜d8 6. ♜e5 ♜d9 7. ♜f6 ♜d10.** Как будто усилия не увенчались успехом – ладья должна уйти, уступая дорогу черному королю. Однако белые добились важной цели – перебросили своего короля правее ладьи, и теперь обе их фигуры участвуют в окружении противника. **8. ♖i1! ♜e10.** Королю остается бежать на восток, но далеко ему не уйти. **9. ♜g7 ♜f10 10. ♜h8 ♜g10 11. ♜i9!** Все, черный король отрезан по обоим направлениям. Дело свелось к мату одинокому королю на обычной доске. Три фигуры разыграли на доске настоящий шахматно-математический спектакль!

ТОНКИЕ МАРШРУТЫ КОРОЛЯ

Король выделяется среди всех фигур своей неторопливостью – с любого места он может переступать только на соседние поля доски. Однако это свойство не мешает ему быть интересным действующим лицом в шахматной математике.

В главе 1 мы уже обратили внимание на своеобразную геометрию шахматной доски, которая отличается от обычной, евклидовой геометрии. При этом нестандартное измерение расстояний на доске лучше всего иллюстрирует движущийся король. Суть в том, что у короля имеется много кратчайших расстояний между двумя данными полями доски. Но сколько существует таких путей? – это уже чисто математическая задача.

Сколькими способами король с поля e1 может добраться кратчайшим путем до поля d8?

Очевидно, кратчайшее путешествие короля до цели занимает семь ходов, причем он может перемещаться любыми зигзагообразными путями, лишь бы на каждом ходу переступать с одной горизонтали на другую, оставаясь при этом внутри прямоугольника e1-a5-d8-h4 (рис.1).

Для подсчета искомого числа путей составим таблицу, которую будем заполнять прямо на полях доски. На каждом поле стоит число кратчайших путей до него с поля e1. На d2, e2 и f2 король попадает в один ход единственным способом, и поэтому на них стоят единицы; стоят единицы и на полях c3, g3. На d3 король попадает в два хода двумя способами, а на e3 – тремя. В общем случае число кратчайших путей до данного поля равно сумме чисел, стоящих на полях предыдущей горизонтали, с которых король попадает на него в один ход. Пользуясь этой закономерностью, мы в конце концов заполним всю таблицу и получим, в частности, что до d8

70	160	266	357	393	356	259	133
20	50	90	126	141	126	89	44
5	15	30	45	51	45	30	14
1	4	10	16	19	16	10	4
	1	3	6	7	6	3	1
		1	2	3	2	1	
			1	1	1		
				1			

Рис.1. За сколько ходов?

король может добраться кратчайшим образом 357 способами. Из рисунка 1 следуют ответы и для других полей доски. Ясно, что заполняя соответствующую таблицу, можно найти число кратчайших путей короля между любой парой полей, при этом доска может иметь любую форму и даже содержать запрещенные поля.

Таблицы такого типа, как на рисунке 1, очень важны в комбинаторике, одном из разделов математики. Немного отвледемся и взглянем на таблицу, изображенную на рисунке 2, а – вместо короля стоит шашка, которая, как известно, ходит только вперед на одно поле по диагонали. Здесь мы считаем, что

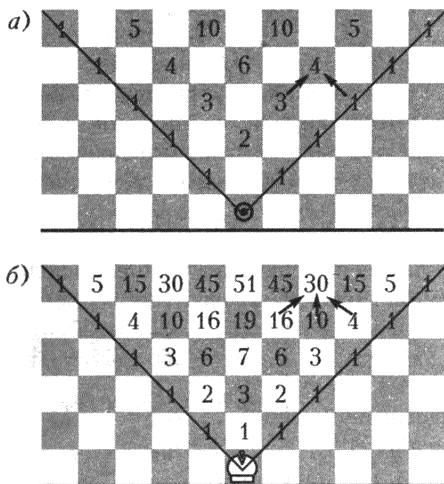


Рис.2 Треугольник Паскаля на шахматной доске

границы доски простираются до бесконечности. Каждое число p -й горизонтали ($p > 1$) равно сумме двух чисел $(p - 1)$ -й, стоящих на полях, с которых шашка может пойти на данное. Вместе с тем это есть число способов, которыми шашка может добраться до него с исходного поля. Числовая таблица на рисунке 2, а называется в комбинаторике треугольником Паскаля или 2-арифметическим треугольником. Как вы помните из школьной математики, элементами ее являются биномиальные коэффициенты (надо полагать, что такое бином Ньютона, читатель знает очень хорошо!).

Вернемся к королю. Таблица на рисунке 2, б обобщает таблицы и на рисунке 2, а, и на рисунке 1. С одной стороны, доска снова бесконечная, а с другой – каждое число является суммой трех (у шашки было два хода, у короля три), и поэтому

соответствующий треугольник называется 3-арифметическим. Его элементы при помощи несложных формул выражаются через биномиальные коэффициенты. Конечно, на реальной доске боковые границы внесли свое изменение, и, можно сказать, на рисунке 1 был представлен 3-арифметический треугольник с границами.

Какое наибольшее число королей можно расставить на доске так, чтобы они не угрожали друг другу, т.е. не стояли рядом?

Разобьем доску на 16 квадратов 2×2 (рис. 3, доска 9×9 , а доска 8×8 выделена). Короли не касаются друг друга, в каждом квадрате находится не более одного из них.

Это означает, что больше 16 мирных королей расставить невозможно – это и есть наибольшее число. Расставить столько королей можно 281571 способом.

Обобщим задачу для доски $n \times n$. Если n четно, то доска разбивается на $n^2/4$ квадратов, и столько же можно расставить королей. При нечетных n доска разбивается на $(n-1)^2/4$ квадратов 2×2 , на каждый из которых можно поставить по королю; еще n королей уместится на границе доски, и всего получаем $(n+1)^2/4$ мирных королей. Случай $n=9$ представлен на рисунке 3, на доске стоит 25 королей. Если n представить в виде $n=2k$ или $n=2k-1$, то максимальное число мирных королей, независимо от четности n , можно записать как k^2 . Формула для числа таких расстановок неизвестна. Заметим, что в главе 14 эта задача рассматривается для тороидальной доски.

Какое наименьшее число королей можно расставить на доске так, чтобы они держали под боем все свободные поля?

На рисунке 4 в каждом из девяти выделенных прямоугольников (пять из них квадраты)

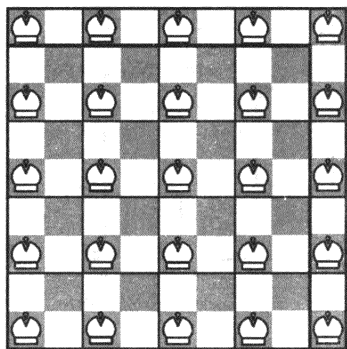


Рис 3. Задача о мирных королях

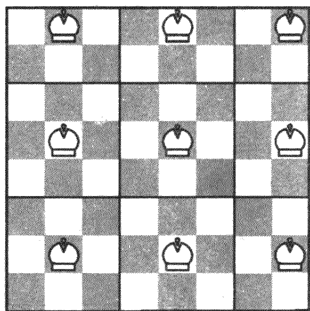


Рис 4. Девять королей-часовых

есть поле, которое может атаковать только король, находящийся в нем же. Следовательно, искомое число королей равно девяти.

Для доски $n \times n$ задача также решается с помощью разбиения на квадраты 3×3 и граничные прямоугольники. В зависимости от остатка при делении n на 3, число n можно представить одним из трех способов: $n = 3k$, $n = 3k - 1$, $n = 3k - 2$. Число королей, которые держат под боем все свободные поля доски $n \times n$, записывается очень просто, оно равно k^2 . При $n = 8$ имеем $k = 3$ и $k^2 = 9$ (см. рис.4), эти девять королей можно расставить 3600 способами. Формула для общего числа расстановок не найдена.

Теперь отправим короля путешествовать по доске. Как обычно, требуется, чтобы он обошел все поля доски, посетив каждое из них по одному разу. Ясно, что неторопливый король может воспользоваться любым маршрутом ферзя или ладьи, двигаясь по нему более медленным темпом. За 63 хода он обойдет всю доску (замкнутый маршрут содержит 64 хода).

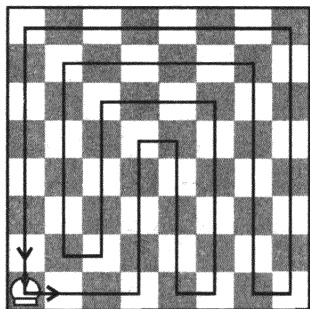


Рис.5. Прямолинейный маршрут

Какое наименьшее и наибольшее число диагональных ходов содержит замкнутый несамопересекающийся маршрут короля по доске?

В этой остроумной головоломке все ясно: искомое число равно 0, если все 64 хода прямые (рис.5).

На рисунке 6,а показан замкнутый несамопересекающийся маршрут, в котором король делает 36 диагональных ходов (и 28 прямых). Докажем, что это и есть наибольшее

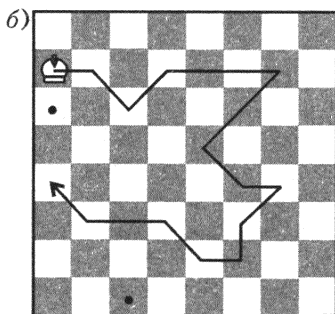
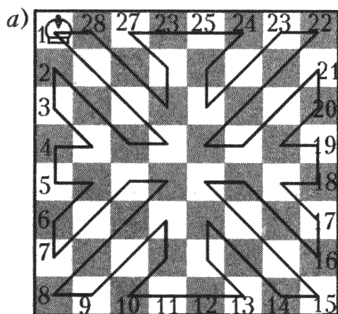


Рис 6. Задача о замкнутом маршруте короля

число. Занумеруем все 28 граничных полей доски в том порядке, в каком король посещает их в выбранном маршруте (см. рис. 6,а). Разобьем его на 28 участков: от первого крайнего поля до второго, от второго до третьего и т.д., от 28-го до первого.

Убедимся, что начальное и конечное поля каждого из этих участков соседние. Пусть это не так, и крайние поля какого-то участка не соседние, например, а4 и а7 (рис.6,б). Поскольку маршрут замкнут, то начальное поле и направление обхода можно выбрать произвольно. Будем считать, что король начинает с а7 и идет к а4. Раз эти поля не соседние, то участок а7-а4 разбивает доску на две части. Возьмем два поля, принадлежащие разным частям, например, а6 и с1. Король должен посетить эти поля, но при этом путь а6-с1 пересечет путь а7-а4. Значит, маршрут короля самопересекается – противоречие.

Итак, крайние поля всех 28 участков – соседи на доске, а поскольку у них разные цвета, на каждом из участков король делает хотя бы один прямой ход (при диагональных цвет поля не меняется). Значит, маршрут короля содержит не меньше 28 прямых ходов – по вертикали и горизонтали, т.е. не больше 36 диагональных.

Поскольку король при желании может сделать все 64 хода прямые, то попутно мы выяснили, что наименьшая длина замкнутого маршрута короля по всей доске равна 64, а наибольшая $28 + 36\sqrt{2}$.

Забавно, что если короля отправить по замкнутому несамопересекающемуся пути, но не требовать, чтобы он посетил все поля доски, то число диагональных ходов может возрасти.

На рисунке 7 восемь полей, отмеченных точками, остались без внимания короля, зато число диагональных ходов увеличилось до 44. Вопрос о том, можно ли побить этот рекорд, остается открытым.

До сих пор предполагалось, что маршрут короля замкнутый и несамопересекающийся. И.Акулич заинтересовался другими вариантами: а что если отказаться от одного из этих требований или даже обоих?

Какое наибольшее число диагональных ходов содержит несамопересекающийся открытый маршрут короля?

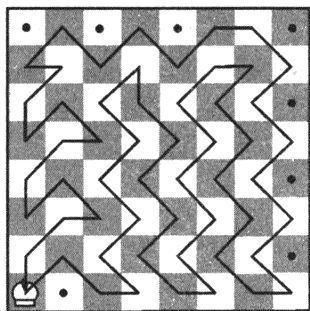


Рис.7 Восемь полей король обошел стороной

На рисунке 8 король сделал 49 диагональных ходов. Доказать, что это максимум, очень легко. Каждый такой ход пересекает узел доски (общую точку четырех соседних полей). Всего узлов 49, и пройти дважды через один и тот же без самопересечений невозможно!

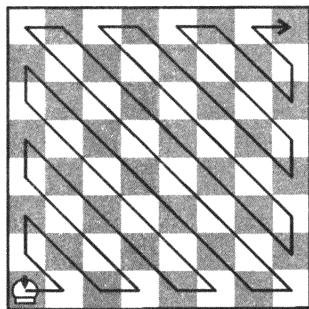


Рис.8 Рекорд для несамопересекающегося маршрута

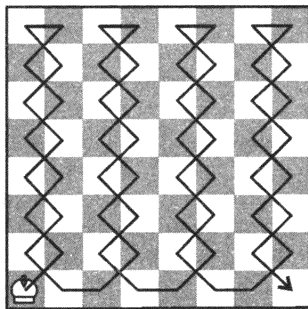


Рис.9 Рекорд для самопересекающегося маршрута

Приведенный маршрут короля открытый, но те же рассуждения годятся и для замкнутого. Однако в самопересекающемся открытом маршруте короля число диагональных ходов увеличивается до 56 (рис.9).

А вот одна необычная игра, тоже связанная с королевской прогулкой.

Двое по очереди передвигают короля, стоящего на доске. Игрок, вынужденный поставить его на поле, которое король уже посетил, проигрывает. На чьей стороне победа?

Верх берет тот, кто начинает, причем при произвольном положении короля. Для этого он мысленно разбивает доску на прямоугольники 2×1 (любым способом). Затем первым ходом ставит короля на поле, парное исходному с королем (в том же прямоугольнике). А далее на любой ход соперника передвигает короля на парное ему поле. Таким образом, после каждой пары ходов один прямоугольник «исключается» из игры. В конце концов второму игроку придется занять поле, которое король уже посещал.

В графике замкнутого маршрута короля никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой. Докажите, что наименьшее число диагональных ходов равно восьми.

Доказательство довольно длинное. Ограничимся тем, что приведем один из возможных маршрутов короля (самопересекающийся), содержащий ровно восемь диагональных ходов (рис.10).

На доске 16 королей, каждый из которых нападает хотя бы на одного из остальных. Нескольких королей убрали, и никакие два из оставшихся уже не угрожают друг другу. Какое наибольшее число королей может остаться?

Король, снятый с доски, мог нападать не более чем на четыре оставшихся (иначе и некоторые из них угрожают друг другу). Поэтому число оставшихся не может превосходить число снятых более чем в четыре раза, т.е. их не более 12. Подходящая ситуация показана на рисунке 11 – здесь 16 королей, и, после удаления четырех черных, остаются 12 белых, никакие два из которых не угрожают друг другу.

Король-самоубийца. На доске 1000×1000 находится белый король и 499 черных ладей. Доказать, что при любом расположении этих фигур король за некоторое число ходов всегда может встать под шах.

Отправим короля сначала в левый нижний угол, а затем по большой черной диагонали в правый верхний угол. После первого хода из угла ♔a1-b2 и ответа черных три нижние горизонтали и три левые вертикали должны быть свободны от ладей, иначе король уже следующим ходом встанет под шах. Пусть теперь король сделал еще 997 ходов по диагонали, и черные ответили на последний из них. В этот момент три верхние горизонтали и три правые вертикали должны быть свободны от ладей, иначе король следующим ходом добьется своей цели. За 997 ходов короля по диагонали каждая ладья поменяла вертикаль и горизонталь прежде, чем на них появился король, т.е. сделала не меньше двух ходов. Но ладей 499,

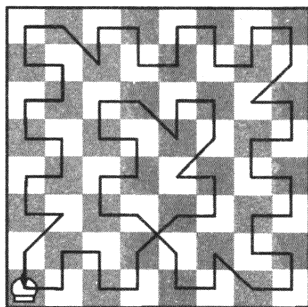


Рис.10. Всего восемь диагональных ходов

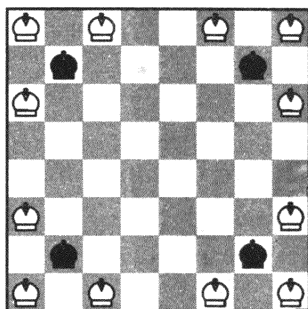


Рис.11. Четыре короля покидают доску

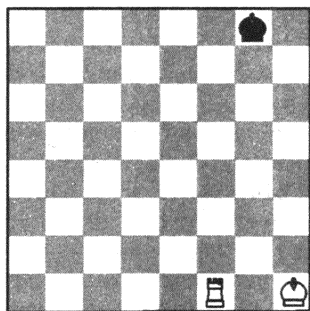


Рис. 12. Выигрыш с неподвижной ладьей

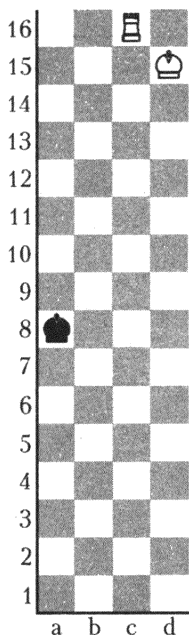


Рис 13. Выигрыш

и за 997 ходов они не успевают переместиться – не хватает одного хода!

Последние две задачи с участием королев находятся на грани математики и практической игры.

В позиции на рисунке 12 задание кажется наивным, но есть важное дополнительное условие – ладье разрешается ходить только тогда, когда она объявляет мат! Таким образом, главное действующее лицо здесь – король.

1. ♔g2! Оппозиция завоевана. 1... ♕g7 2. ♕g3! Главное теперь ее не потерять. 2... ♕g6 3. ♕g4! ♕h6 4. ♕f5! До сих пор белый король не мог встать перед ладьей, так как его черный оппонент сразу вырывался на свободу через линию «f». И вот такая возможность появилась, белые осуществляют обходной маневр. 4... ♕g7 (4... ♕h5 5. ♖h1×) 5. ♕g5! ♕h7 6. ♕f6! ♕g8 7. ♕g6! ♕h8 8. ♖f8×.

Простенькая задачка, а более хитрый ее вариант придумал американский математик Л.Мозер. Вновь на доске всего три фигуры.

На доске, неограниченной с двух сторон (на рис.13 нет правого и верхнего краев) белые ставят мат при том же условии: ладья вступает в игру лишь в последний момент – объявляя мат.

И здесь ключ к решению – оппозиция. Тонко маневрируя, белый король загоняет своего оппонента в единственный угол доски, после чего ладья вступает в бой – ♖c16-a16×.

1. ♕c15! Пусть теперь черный король движется по крайней вертикали. 1... ♕a9 2. ♕c14 ♕a10 3. ♕c13 ♕a11 4. ♕c12 ♕b10. Выше идти нельзя – 4... ♕a12 5. ♖a16×. 5. ♕b12. Ближняя оппозиция! 5... ♕a10 6. ♕c11! Короли сдвинулись на вертикаль ниже, дальнейшее понятно.

Если первым ходом король встает на линию «b» – 1... ♕b9, то решает 2. ♕b15!, занимая дальнюю оппозицию. 2... ♕b10 3. ♕b14! ♕b11 4. ♕b13! ♕a11 5. ♕c12! и т.д. На 2... ♕a9 следует 3. ♕c14! ♕b10 4. ♕b14! и т.д. Замечательный пример на тему оппозиции.

Интересно, что после более естественного вступления 1. ♕c14? выигрыш уже упущен – 1... ♕a9 2. ♕c13 (2. ♕b13 ♕b9, и оппозицией овладевают черные) 2... ♕a10 3. ♕c12 ♕a11 4. ♕c11 ♕a12. Черный король неуязвим.

СЛОН – БИЛЬЯРДНЫЙ ШАР

В отличие от других фигур, слону разрешается перемещаться только по полям одного цвета, чернополюному – по черным, белополюному – по белым. Итак, в его распоряжении половина доски, впрочем, преобразование, которое предложил Л. Уэлч, приводит к доске, на которой уже все поля находятся в распоряжении слона. Такая доска имеет ступенчатую форму и получается в результате описывания квадратов около всех одноцветных полей обычной доски (рис.1,а). Доска Уэлча состоит из 32 «больших» полей, каждое из которых доступно слону – в

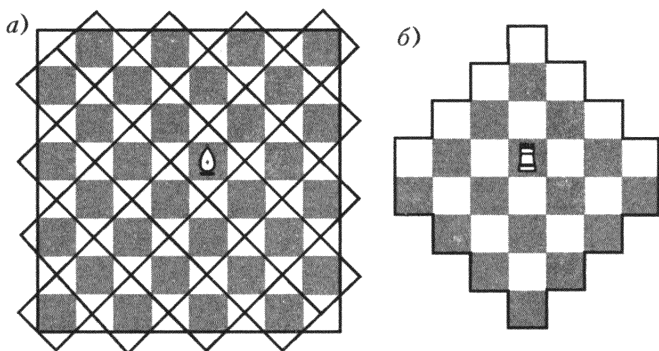


Рис.1. Преобразование Уэлча

данном случае чернополюному. Это преобразование переводит диагонали стандартной доски в вертикали и горизонтали доски Уэлча, и, значит, ходу слона на 64-клеточной соответствует ход ладьи на 32-клеточной. Осталось развернуть ее на 45° и, для порядка, раскрасить в черно-белый цвет (рис.1,б). Рассмотрим, однако, головоломки о слоне на привычной доске 8×8 .

В задачах о маршруте слона необходимо ограничиться только одноцветными полями. Маршрут из 17 ходов, предложенный Дьюдени (рис.2,а), весьма симметричен, но не является кратчайшим. Самое быстрое путешествие слона с посещением всех полей одного цвета (рис.2,б) в эстетическом отношении уступает ему – на графике появляются «точки возврата», но на ход короче.

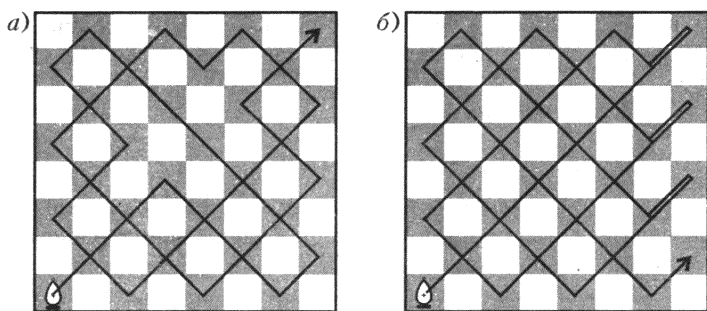


Рис.2. Маршруты слона

За какое наименьшее число ходов слон, стартуя с $a1$, может обойти все черные поля доски $n \times n$ (при нечетных n черных полей на доске больше)?

На рисунке 3 показан обход слонем всех черных полей на доске 9×9 . Из рисунков 2, б и 3 следует метод построения необходимых маршрутов при любых n – четных и нечетных. Нетрудно убедиться, что кратчайший маршрут слона составляет $5n/2 - 4$ ходов при четных n и $(5n + 1)/2 - 4$ при нечетных ($n > 1$).

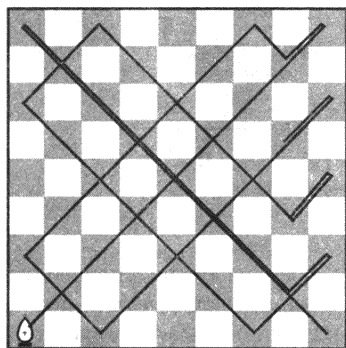


Рис.3. Путешествие слона на доске 9×9

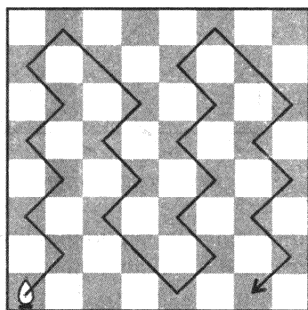


Рис.4 Несамопересекающийся путь слона

Маршрут ферзя, ладьи и короля по доске можно выбрать таким, что его график не будет иметь самопересечений (маршрут ферзя на ход длиннее кратчайшего). Для легких фигур – коня и слона – аналогичные графики (маршрут слона – по полям одного цвета) самопересекаются. Несамопересекающийся путь коня состоит из 35 ходов (рис.4, е из главы 2), т.е. конь посещает 36 полей. Несамопересекающийся путь слона содержит 25 ходов

и охватывает 29 полей (рис. 4). Таким образом, на одноцветной части доски без его внимания остаются лишь три поля – с1, d8 и h8.

Какой самый длинный несамопересекающийся путь слона на доске $n \times n$?

Если с конем задача в общем случае не решена, то со слоном имеется полная ясность. На нечетной доске слон может обойти все поля меньшего цвета (белого), число их равно $(n^2 - 1)/2$, а на четной – $(n^2 - n + 2)/2$ полей, и в обоих случаях график не будет самопересекаться (при $n = 8$ получаем 29 полей).

Со следующей задачей о слоне у автора связана одна забавная история.

С углового поля доски $m \times n$ ($m, n > 1$) начинается двигаться слон. Дойдя до края доски, он отражается от ее края под прямым углом, как бильярдный шар, и меняет направление. Как только слон попадает в угол доски, он останавливается. При каких m и n слон посетит все черные поля (вставить на них можно неоднократно)?

Рассмотрим прямоугольник $A_{00}A_{01}A_{11}A_{10}$ с вершинами в центрах их угловых полей (рис. 5, а). Длина отрезка $A_{00}A_{01}$ равна $m - 1$, а длина отрезка $A_{00}A_{10}$ равна $n - 1$. Сдвигая прямоугольник неограниченное число раз вправо на m единиц и вверх на n единиц, получаем решетку (рис. 5, б), узлы которой обозначим через A_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, \dots$). (Узел A_{ij} – это точка пересечения прямой, проходящей через A_{10} параллельно $A_{00}A_{01}$, с прямой, проходящей через A_{0j} параллельно $A_{00}A_{10}$).

Проведем теперь из точки A_{00} луч d под углом 45° к прямой $A_{00}A_{01}$ (d – биссектри-

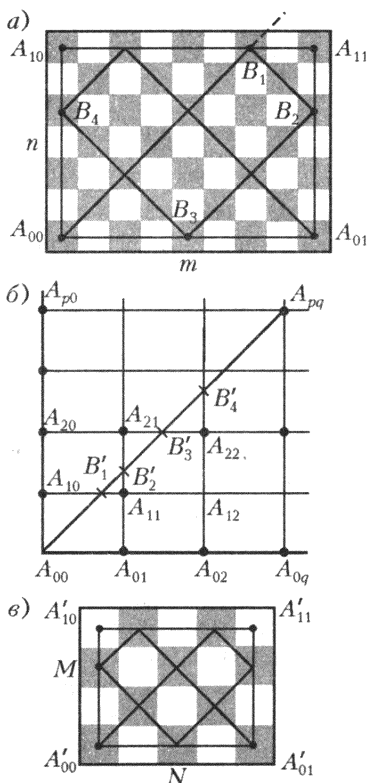


Рис 5. Задача о слоне и бильярде

са прямого угла решетки). Тогда пути слона $A_{00}B_1B_2B_3, \dots$ по доске будет соответствовать последовательность точек $A_{00}, A_{00}, B'_1, B'_2, B'_3, \dots$, в которых луч d пересекает стороны решетки. Слон останавливается на l -м ходу (попав в угол доски) тогда и только тогда, когда точка B_l совпадает с углом решетки.

Пусть A_{pq} – первый (не считая A_{00}) узел, лежащий на луче d ; он соответствует достигнутому слоном угловому полю доски. Поскольку $A_{00}A_{0q}A_{pq}A_{p0}$ – квадрат, имеем:

$$p(n-1) = q(m-1) = a,$$

где a – наименьшее общее кратное чисел $m-1$ и $n-1$ (узел A_{pq} – первый!).

Между узлами A_{00} и A_{pq} луч d пересекает стороны решетки $p+q$ раз, и, соответственно, $p+q$ раз слон попадает на край доски. Граница доски $m \times n$ содержит $2m + 2n - 4$ полей – поровну белых и черных. Слон пройдет мимо всех черных полей доски в том и только в том случае, если он посетит все граничные черные поля, т.е. если

$$p + q = m + n - 2.$$

Из двух равенств следует, что

$$a/(m-1) + a/(n-1) = (m-1) + (n-1),$$

откуда $a = (m-1)(n-1)$. Но наименьшее общее кратное двух чисел равно их произведению тогда и только тогда, когда они взаимно просты. Итак, условие, при котором слон обойдет все черные поля доски $m \times n$, состоит в том, чтобы числа $m-1$ и $n-1$ были взаимно просты. Разумеется, на обычной доске, как и на любой квадратной $n \times n$, в распоряжении слона ровно один ход – из угла в угол, охватывающий всего n полей.

Эта задача возникла как частный случай одной математической проблемы из области целочисленного программирования, не имеющей никакого отношения к шахматам. Ее авторы, Е.Гик и А.Жорницкий, решили опубликовать ее в журнале «Квант». Каково же было наше удивление, когда, раскрыв очередной номер, мы обнаружили, что у задачи появилось... продолжение, а именно вторая часть:

Сколько всего полей посетит слон на доске $m \times n$, прежде чем остановится?

По «вине» редакции журнала пришлось решать задачу снова, причем вторая часть оказалась посложнее первой...

Если каждое внутреннее черное поле доски, через которое слон проходит два раза, учитывать дважды, то число черных полей, посещаемых слоном, равно $a + 1$ (поскольку длина

стороны квадрата $A_{00}A_{0q}$ равна a , и на диагонали $A_{00}A_{pq}$ лежат центры $a + 1$ квадратов со стороной 1). Чтобы найти, сколько черных полей посетит слон на самом деле, нужно из числа $a + 1$ вычесть число внутренних черных полей, пройденных слоном дважды. Подсчитаем, сколько всего таких полей.

Обозначим через b наибольший общий делитель чисел $m - 1$ и $n - 1$. Конечно, теперь уже предполагается, что эти числа не взаимно просты (в противном случае, из «основной» части задачи следует, что слон посетит все черные поля доски). Итак, $b > 1$ и $(m - 1)(n - 1) = ab$.

Положим $M = (m - 1)/b + 1$, $N = (n - 1)/b + 1$.

Числа $M - 1$ и $N - 1$ взаимно просты, поэтому, если взять доску размером $M \times N$, то слон, начав двигаться из черного угла, обойдет все ее черные поля. Прямоугольники $A_{00}A_{10}A_{11}A_{01}$ и $A'_{00}A'_{10}A'_{11}A'_{01}$ (см. рис.5, а, в) подобны, поэтому число самопересечений путей слона на обеих досках (размерами $m \times n$ и $M \times N$) одно и то же. Но так как слон попадает на все граничные черные поля доски $M \times N$ и проходит по всем ее диагоналям, то во всех внутренних полях этой доски его путь самопересекается. Число внутренних черных полей на доске $M \times N$ равно

$$\left[\frac{MN - (2M + 2N - 4) + 1}{2} \right] = \left[\frac{(M - 2)(N - 2) + 1}{2} \right]$$

(квадратные скобки означают целую часть числа). Следовательно, на доске $m \times n$ число черных полей, которые обойдет слон, равно

$$\begin{aligned} a + 1 - \left[\frac{(M - 2)(N - 2) + 1}{2} \right] &= \\ &= \frac{(m - 1)(n - 1)}{b} + 1 - \left[\frac{((m - 1)/b - 1)((n - 1)/b - 1) + 1}{2} \right] = \\ &= \frac{(m - 1)(n - 1)}{b} - \left[\frac{((m - 1)/b - 1)((n - 1)/b - 1) - 1}{2} \right]. \end{aligned}$$

На рисунке 6 показаны перемещения слона по доскам 15×10 и 25×10 . На доске 15×10 (рис.6, а) слон, стартовав в углу, обошел все 75 черных полей (числа 14 и 9 взаимно просты). На доске 25×10 (рис.6, б) он посетил только 66 черных полей (числа 24 и 9 имеют общий делитель 3), а на доске $25 \times 10 - 136$ черных полей (числа 24 и 14 имеют общий делитель 2).

Итак, слон достаточно побродил по доске, пусть он теперь немного постоит, отдохнет...

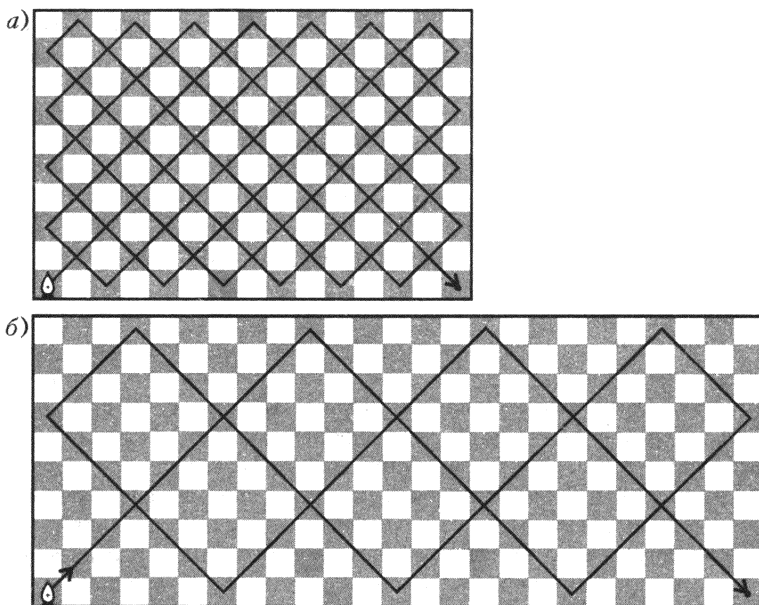
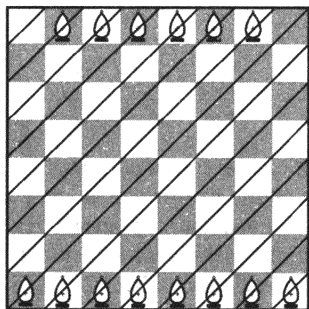


Рис 6 Путешествие слона по большим доскам

Какое наибольшее число слонов можно расставить на доске так, чтобы они не угрожали друг другу?

Проведем на доске пятнадцать диагональных линий, как показано на рисунке 7. Если слоны не угрожают друг другу, то на каждой из них стоит не более одного слона. Поскольку прямые пересекают все поля доски, общее число слонов не превышает пятнадцати. Однако ровно столько поставить не удастся, так как две крайние прямые содержат по одному полю, и оба они расположены на одной диагонали a8-h1. Рекордная расстановка четырнадцати слонов показана на том же рисунке 7.



новок равно 2^n , причем в каждой из них все слоны располагаются на краю доски.

Какое наименьшее число слонов можно расставить на доске так, чтобы они держали под обстрелом все ее свободные поля?

Вполне хватает восьми слонов – четырех белопольных и четырех чернопольных (рис.8). Покажем, что меньше недостаточно. Предположим противное.

Пусть белопольных слонов меньше четырех. Тогда не менее пяти белых диагоналей (из восьми отмеченных на рисунке) свободны от слонов, причем хотя бы одна из них содержит больше трех полей. Так как ни один из слонов не угрожает более чем одному полю этой диагонали (на ней самой слонов нет), на доске найдутся поля, лежащие вне зоны их действия – противоречие. Аналогично убеждаемся, что на доске стоит не меньше четырех чернопольных слонов, т. е. общее число не меньше восьми.

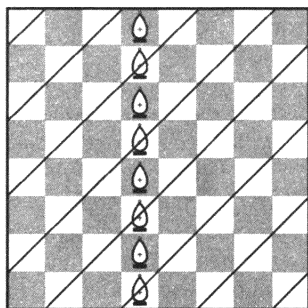


Рис.8 Восемь слонов-часовых

На доске $n \times n$ число слонов в количестве n (но не меньше) могут контролировать все свободные поля доски. Их можно расположить вдоль любой центральной вертикали или горизонтали доски.

НЕЗАВИСИМОСТЬ И ДОМИНИРОВАНИЕ

Множество интересных задач в шахматной математике возникает при решении следующих двух комбинаторных проблем.

1. *Какое наибольшее число одноименных фигур (коней, ладей, ферзей, королей и слонов) можно расставить на доске так, чтобы никакие две из них не угрожали друг другу?*

2. *Какое наименьшее число одноименных фигур (коней, ладей, ферзей, королей и слонов) можно расставить на доске так, чтобы они держали «под обстрелом» все свободные поля?*

Первое из этих чисел будем называть *числом независимости* для соответствующих фигур, а второе – *числом доминирования*. Мирные фигуры, т.е. не угрожающие друг другу, называем также *независимыми*, а фигуры, обстреливающие все свободные поля доски, т.е. доминирующие на ней, – *доминирующими*.

Введенные термины заимствованы из математической теории графов, в которой задачи на шахматной доске очень часто используются для удобной иллюстрации важных понятий. Вот строгие определения, касающиеся графов.

1. Множество вершин графа называется *независимым*, если никакие две из них не соединены между собой ребром. Среди независимых множеств существует одно или несколько максимально независимых, содержащих наибольшее число вершин. Само оно называется *числом независимости* для данного графа (или *числом его внутренней устойчивости*).

2. Множество вершин графа называется *доминирующим*, если каждая вершина вне его соединена ребром хотя бы с одной вершиной, принадлежащей этому множеству. Среди доминирующих множеств существует хотя бы одно минимально доминирующее, содержащее наименьшее число вершин. Само оно называется *числом доминирования* для данного графа (или *числом его внешней устойчивости*).

Как мы знаем, каждой фигуре можно поставить в соответствие граф с вершинами на полях доски. Если возможен ход между двумя данными полями, то расположенные в них вершины соединяются ребром. Очевидно, наша первая шахматная проблема заключается в определении числа независимости для графов фигур, а вторая – в определении числа доминирования.

Такой четкой связью между графами и головоломками на шахматной доске как раз и объясняется популярность шахматных терминов в литературе по теории графов. Существенно, что многие задачи о графах, весьма сложные в общем случае, удается решить для графов шахматных фигур. Попутно мы рассмотрим ряд других вопросов и обобщений, в том числе для доски $n \times n$.

Будем обозначать через N число независимости, а через D – число доминирования для данного графа, индекс обозначает размер доски. Так, N_n и D_n – числа независимости и доминирования на доске $n \times n$.

Результаты наших исследований будем заносить в таблицу 1, знаки вопроса означают, что соответствующие числа неизвестны. После строк с N и D в таблице следуют строки с числом расстановок независимых и, соответственно, доминирующих фигур. Поскольку в популярнее всего задачи и головоломки на обычной доске, отдельно составим таблицу 2 для доски 8×8 .

Конь. Расставляя 32 коня на полях одного цвета (на рисунке 1 – черного), получаем два независимых множества. Убедимся, что других расстановок мирных коней в таком количестве не существует. Рассмотрим произвольный замкнутый маршрут коня на доске. В нем после каждого поля, занятого фигурой данной расстановки, должно следовать свободное. Значит, кони не могут занимать больше половины доски. Если же половина заполнена, то они следуют в маршруте через одно поле, т.е. расположены на полях одного цвета.

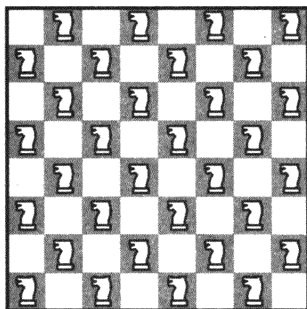


Рис 1 32 мирных коня

Итак, $N_8 = 32$, и имеются две расстановки. Других фигур, не угрожающих друг другу, столько расставить невозможно, поэтому коней по праву можно считать самыми мирными жителями шахматной семьи.

Очевидно, обобщая, имеем: $N_n = n^2/2$, если n четно, и $N_n = (n^2 + 1)/2$, если n нечетно. В первом случае всегда две одноцветные расстановки, а во втором – только одна (кони стоят на полях того цвета, которого на доске больше).

На рисунке 2 еще одно оригинальное расположение 32 коней, на другую тему. Здесь каждый конь бьет ровно двух других (все кони разбиты на четыре связки).

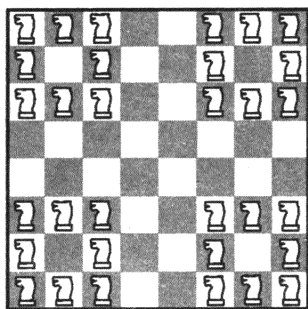


Рис.2. Связки коней

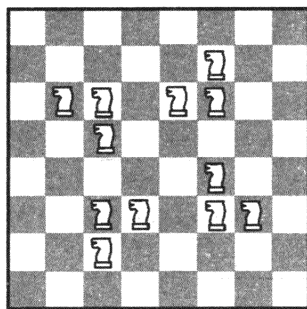


Рис.3. Двенадцать коней-часовых

Для доминирования на стандартной доске достаточно 12 коней (рис. 3). Любопытно, что и здесь существуют всего две расстановки – вторая получается из первой при зеркальном отражении. В общем случае задача не решена, поэтому в таблице 1 появились первые вопросительные знаки.

Ладья. Все интересующие нас результаты уже получены выше, в общем случае $N_n = D_n = n$, а число решений равно, соответственно, $n!$ и $2n^n - n!$. На шахматной доске имеем $8!$ расстановок восьми независимых и $2 \times 8^8 - 8!$ – восьми доминирующих ладей.

Таблица 1

Независимость и доминирование

	Конь	Ладья	Ферзь	Король	Слон
Число независимости для доски $n \times n$ (N_n)	$n^2/2$, при четных n , $(n^2+1)/2$, при нечетных n	n	1, при $n=1$ и $n=2$, 2, при $n=3$, n при $n \geq 4$	k^2 , где $n=2k$ или $n=2k-1$	1, при $n=1$, $2n-2$ при $n \geq 2$
Число расстановок	2, при четных n , 1, при нечетных n	$n!$?	?	1, при $n=1$, 2^n при $n \geq 2$
Число доминирования для доски $n \times n$ (D_n)	?	n	?	k^2 , где $n=3k$, $n=3k-1$ или $n=3k-2$	n
Число расстановок	?	$2 \cdot n^n - n!$?	?	см.с.89–90

Таблица 2

Независимость и доминирование на обычной доске

	Конь	Ладья	Ферзь	Король	Слон
Число независимости	32	8	8	16	4
Число расстановок	2	40320	92	281571	256
Число доминирования	12	8	5	9	8
Число расстановок	2	$2 \cdot 8^8 - 8$	4860	3600	20736

Ферзь. Как мы знаем, для числа независимости имеет место: $N_2 = 1$, $N_3 = 2$, а для всех $n \neq 2, 3 - N_n = n$. В таблице 2 (на с. 52) указано число расстановок для $n \leq 12$, в общем случае задача не решена. На стандартной доске можно расставить 8 мирных ферзей 92 различными способами.

Число доминирования ферзей на стандартной доске, как, впрочем, и на досках 9×9 , 10×10 и 11×11 , равно 5, имеется 4860 расстановок пяти ферзей-часовых на доске 8×8 . В общем случае формула для числа доминирующих ферзей на доске $n \times n$ неизвестна, выше указаны некоторые верхние и нижние оценки для него.

Король. Задачи о независимости и доминировании королей тоже обсуждались нами. Наибольшее число независимых фигур на доске $n \times n$ равно k^2 , где $n = 2k$ или $n = 2k - 1$. На доске 8×8 существует 281571 расстановка; для доски $n \times n$ решение неизвестно. Наименьшее число доминирующих королей равно девяти, получена формула и в общем случае. Число расстановок королей на обычной доске равно 3600.

Слон. В предыдущей главе доказано, что $N_n = 2n - 2$ ($n > 1$) и, в частности, на доске 8×8 можно расставить 14 независимых слонов. Число расстановок равно 2^n .

Далее, $D_n = n$ и на доске 8×8 доминируют восемь слонов. Хотя формула для числа расстановок довольно громоздка, приведем ее. Итак, число расстановок n доминирующих слонов равно:

$$\left[\frac{n+1}{2} \left(\frac{n}{2} \right)! \right]^2 \quad \text{при } n = 4k;$$

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 2n - 2}{8} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2 \quad \text{при } n = 4k + 1;$$

$$\left[\frac{n^2 + n + 2}{4} \left(\frac{n}{2} - 1 \right)! \right]^2 \quad \text{при } n = 4k + 2;$$

$$\frac{n^3 + n^2 - 6n + 6}{8} \left(\frac{n-3}{2} \right)! \left(\frac{n+1}{2} \right)! \text{ при } n = 4k + 3.$$

Интересно, что при четных n число расстановок $2n - 2$ независимых слонов и число расстановок n доминирующих представляет собой полный квадрат. Так, на доске 8×8 соответственно имеем: $2^8 = 256 = 16^2$ расстановок 14 независимых слонов и (см. формулу) $108^2 = 11664$ расстановок 8 доминирующих.

Понятно, в чем здесь дело. Чернопольных и белопольных слонов можно расставлять независимо друг от друга. При этом, если доска четная, то число чернопольных расстановок, обладающих некоторым свойством (независимость или доминирование), равно числу белопольных расстановок, обладающих тем же свойством. Пусть оно равно t . Комбинируя каждую из чернопольных с каждой из белопольных, получаем t^2 расстановок, обладающих данным свойством.

Итак, насколько возможно, мы заполнили таблицу 1 и полностью таблицу 2. Поскольку числа независимости и домини-

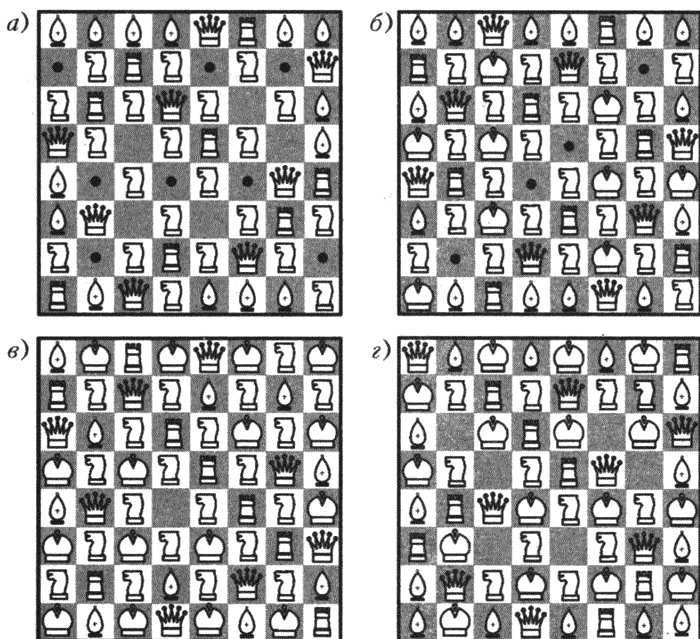


Рис.4. Рекорды независимости

рования на доске 8×8 найдены для всех фигур, то решены обе проблемы, сформулированные в начале главы.

Позиция на рисунке 4,а найдена Г.Дьюдени еще в XIX в. На доске одновременно уместилось рекордное число мирных фигур: 8 ферзей, 8 ладей и 14 слонов. На белых полях расположился 21 конь, и еще для одного рекорда не хватило 11 полей. При желании на черные поля, помеченные точками, можно поставить еще 8 королей, и тогда свободными останутся всего пять полей.

Таким образом, в расстановке Дьюдени участвуют 59 персонажей, причем одноименные фигуры не бьют друг друга. Этот рекорд держался около 100 лет, и только в 1986 г., всего на одну фигуру, его побил В.Попов (рис.4,б). Здесь при 8 ферзях, 8 ладьях, 14 слонах и 21 коне разместилось 9 королей, и общее число фигур увеличилось до 60. Четыре свободных поля расположились на одной большой диагонали, что придает позиции своеобразную симметрию.

Прошло два года, и был побит и этот рекорд. На рисунке 4,в – позиция, которую обнаружил Б.Курбанов. По-прежнему на доске 8 ферзей и 8 ладей, а третий рекорд установлен не для слонов, а для королей – 16. Коней столько же, сколько у Дьюдени и Попова – 21, но есть еще 10 слонов. Итого 63 фигуры, почти полная доска.

Но и на этом дело не кончилось. Спустя еще год один из любителей головоломок придумал новую позицию (рис.4,г). Число рекордов увеличилось до четырех: 8 ферзей + 8 ладей + 14 слонов + 16 королей, причем это уже предел – доказано, что пяти рекордов одновременно не бывает. На доске еще 12 мирных коней, а вот оставшиеся шесть пустых полей уже никак не использовать.

До сих пор мы занимались классическими головоломками о расстановке шахматных фигур. Однако существует множество интересных задач, в которых используются различные наборы фигур (необязательно одноименных). Если говорить о независимости, то можно расставлять произвольное число фигур, не угрожающих друг другу. Вот общая формулировка целого класса задач.

Сколькими способами можно расставить p мирных фигур на доске $n \times n$ ($p \leq N_n$)?

Расставлять фигуры можно одного цвета или обоих, или требовать, чтобы белые и черные не угрожали друг другу. А следующая головоломка имеет более шахматное содержание.

При каком наименьшем n на доске $n \times n$ уместится весь комплект белых и черных фигур (без пешек), причем фигуры

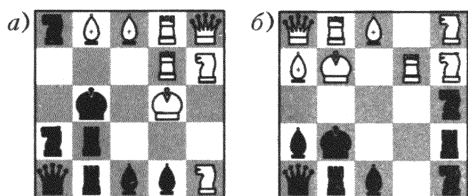


Рис.5. Белые и черные фигуры не мешают друг другу

противоположного цвета не угрожают – уже по-шахматному! – друг другу?

На доске 4×4 16 персонажей невольно войдут в соприкосновение, а на доске 5×5 искомые расстановки существуют (рис.5),

причем первая центрально-симметрична.

При каком наибольшем p можно расставить на обычной доске p королей, p ферзей и p слонов так, чтобы никакие две фигуры не били друг друга?

На рисунке 6 стоят 12 мирных фигур – 4 короля, 4 ферзя и 4 слона, т.е. $p = 4$. И больше быть не может. Предположим, что

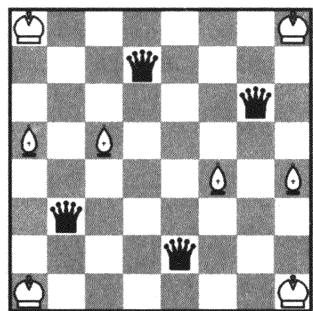


Рис.6. Двенадцать мирных фигур

нам удалось расставить по 5 королей, ферзей и слонов. Все ферзи должны стоять на разных линиях, и остаются свободными лишь девять полей на пересечении трех оставшихся горизонталей и вертикалей, а ведь поставить нужно еще 10 фигур.

В задачах о доминировании часто требуется, чтобы под обстрелом находились не только свободные поля доски, но и занятые фигурами. На рисунке 9 в главе 4 у нас было 5 ферзей-часовых, обладающих этим свойством. Всю доску контролируют также 8 ладей, расположенных вдоль любой ее вертикали или горизонтали. Что же касается других фигур, то их требуется несколько больше, чем для обычного доминирования. Коней и слонов придется взять на два больше, а королей даже на три (рис.7). Итак, 14 коней (рис.7,а), 10 слонов (рис.7,б) и 12 королей (рис.7,в) в состоянии держать под обстрелом все 64 поля доски.

Исследуем теперь доминирование различных наборов фигур, не обязательно одноименных. Пять ферзей справляются с шахматной «тюрьмой» (держат под контролем либо свободные поля доски, либо все), но меньшим числом фигур не обойтись. Любопытно, однако, что двух из пяти ферзей можно заменить более слабыми фигурами – двумя ладьями (рис.8,а) или даже

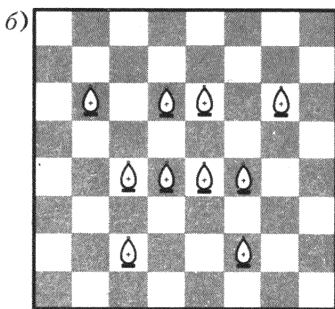
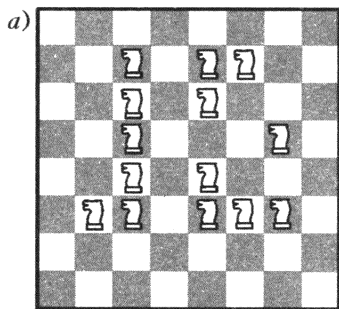


Рис.7. Под охраной все поля доски

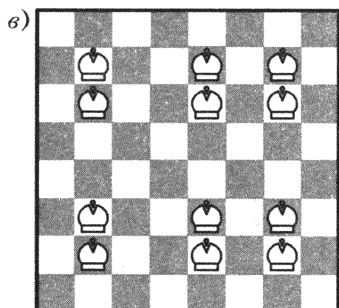
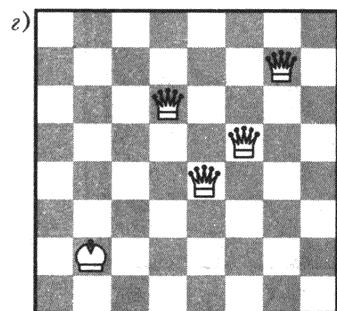
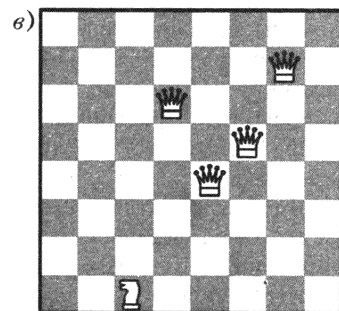
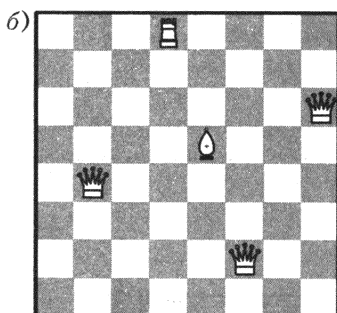
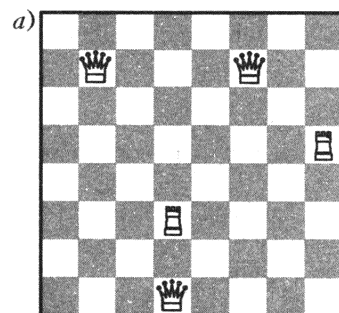


Рис.8. Пять фигур-часовых



ладьей и слоном (рис.8,б), причем в первом случае атакованы все 64 поля. Если ферзью сопровождает конь или король, то на доске придется оставить четыре ферзя (рис.8,в, г), причем их положение здесь одно и то же.

Можно ли расставить на доске полный набор из восьми фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона, два коня) так, чтобы они напали на все 64 поля доски?

Как ни странно, все фигуры доминируют на доске лишь в том случае, если слоны одноцветные (рис.9,а). Если же слоны

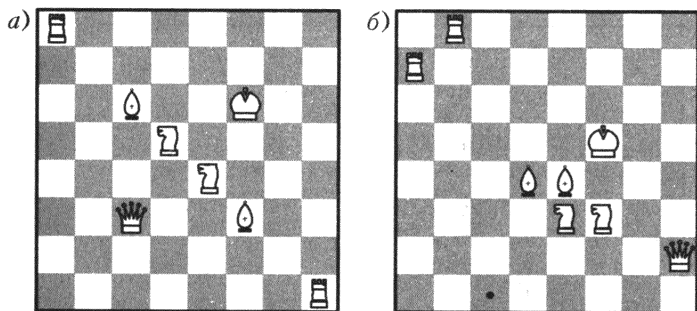


Рис.9. Доминирование восьми фигур

разного цвета, то одно поле всегда останется без присмотра, причем таким полем может быть любое (на рис.9,б оно отмечено – с1).

Если разрешить, чтобы под охраной находились только свободные поля доски, то хватает и семи фигур, одного из слонов можно просто снять (рис.10).

Прежде чем рассказать о следующей задаче о расстановке фигур, дадим еще одно определение из теории графов. Пусть каждой вершине графа приписан некоторый цвет. Скажем, что граф раскрашен правильно, если любые две вершины, связанные одним ребром, имеют разные цвета. Наименьшее число красок, которое требуется для правильной раскраски данного графа, называется его хроматическим числом.

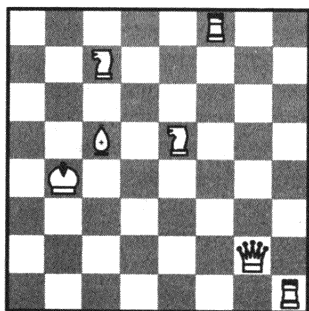


Рис.10. Семь фигур-часовых

Нахождение хроматического числа (как и чисел независимости и доминирования) в общем случае представляет собой весьма сложную

проблему. Упомянем знаменитую задачу о четырех красках, которая по существу сводится к определению хроматического числа в графе.

Можно ли произвольную географическую карту раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две соседние страны были окрашены в разные цвета?

Если в каждой стране поместить вершину графа и соединить ребром пары вершин, расположенных в соседних странах, то получим граф географической карты. Его хроматическое число совпадает с наименьшим числом красок, необходимых для раскраски карты. Гипотеза, согласно которой хроматическое число графа для любой карты не более четырех (хватает четырех красок), была высказана еще в середине XIX в. Несмотря на усилия многих математиков, доказать ее удалось только спустя сто с лишним лет, в 1976 г. А теперь шахматный вариант этой старинной задачи.

Какого наименьшего числа красок достаточно для раскраски всех полей доски, чтобы любые два поля, связанные ходом данной фигуры (ферзя, ладьи, коня, слона или короля), были окрашены в разные цвета?

Меньше всего красок – две – требуется для коней, собственно, здесь и раскрашивать нечего, сама черно-белая доска и есть решение задачи. В случае слонов и ладей достаточно восьми красок, и меньшим числом не обойтись. Каждую вертикаль, заполненную слонами, надо раскрасить в свой цвет. Для ладей все поля первой горизонтали можно окрасить в разные цвета, а далее использовать «циклический сдвиг» красок. Другими словами, если краски пронумеровать от 1 до 8, то окраска первой горизонтали – 1, 2, ..., 8; второй – 2, 3, ..., 8, 1; третьей – 3, 4, ..., 8, 1, 2 и т.д., восьмой – 8, 1, ..., ..., 7.

Переходя к королям, заметим, что для них все четыре поля произвольного квадрата 2×2 должны быть окрашены в четыре цвета. Четырех красок хватает и для всей доски. Левый нижний квадрат произвольно раскрасим в четыре цвета, затем так же раскрасим соседние квадраты 2×2 и т.д., пока не будет раскрашена вся доска.

На рисунке 11 – для ферзей – предложена раскраска доски в де-


6	2	7	3	1	5	9	4
9	1	5	8	4	7	3	2
5	4	9	1	3	2	6	8
2	7	3	4	6	1	5	9
3	6	2	5	7	9	4	1
7	5	1	9	2	3	8	6
 1	9	4	7	8	6	2	3
8	3	6	2	9	4	1	5

Рис.11. Задача о красках для ферзей

вать цветов (числа от 1 до 9 соответствуют девяти краскам). Действительно, здесь никакие два одинаковых числа не стоят на одной вертикали, горизонтали и диагонали. Докажем, что восьми красок уже не хватает.

Все ферзи одного цвета образуют одну из расстановок в задаче о восьми ферзях. Значит, восемь таких расстановок заполняют всю доску. Так как на обеих больших диагоналях по восемь полей, каждое должно войти в какую-то из расстановок, т.е. нас устраивают только такие, которые содержат по одному элементу из обеих диагоналей. Поэтому из 12 основных наборов не годятся: № 12 (нет диагональных полей), № 8 и 9 (есть представители только одной диагонали). Концы диагоналей содержатся лишь в № 4, 5. В них второй диагональный представитель – элемент диагонали, второй от конца. Использование наборов № 4, 5 для четырех цветов (четыре угловых поля) занимает все элементы диагоналей, вторые от конца. Это исключает использование наборов № 1, 2, 3, 6, 7, 10, 11 – ничего не остается!

Доказано, что любую доску $n \times n$ можно раскрасить в $n + 3$ цвета, чтобы ферзи, стоящие на полях одного цвета, не угрожали друг другу. Для некоторых n достаточно и меньшего числа красок: $n + 2$, $n + 1$ или n . Существует гипотеза, что при любом $n \geq 3$ хроматическое число графа ферзей равно либо n , либо $n + 1$.

В наше демократическое время, когда важные решения принимаются большинством голосов, И.Акулич придумал весьма актуальную шахматную головоломку.

Шахматно-демократическая задача. *Какое наибольшее число фигур можно расставить на доске так, чтобы каждая из них угрожала не менее чем:*

а) половине остальных;

б) большинству остальных;

в) квалифицированному большинству, т.е. $2/3$ остальных?

Поскольку ферзь, поставленный на место ладьи, слона, короля и пешки, держит те же поля и еще некоторые, достаточно искать расстановки, в которых используются только ферзи и кони.

Выясним, какое наибольшее число фигур может находиться на доске. Пусть они расставлены нужным образом – выполняется одно из условий – а, б или в. Рассмотрим самую нижнюю горизонталь, на которой имеются фигуры, и самую правую фигуру на ней. Если это ферзь, то он держит не более четырех фигур (слева, слева-сверху, сверху и справа-сверху от себя).

Если это конь, то он тоже угрожает не более чем четырем фигурам (ниже него фигур нет).

Итак, в нашей расстановке имеется хотя бы одна фигура, которая угрожает не более чем четырем другим. Тогда для случая *a* число остальных фигур на доске не больше четырех, для случая *b* – не больше трех, для случая *в* – не больше двух. Поэтому общее число фигур не превышает: для *a* – девяти ($1 + 4 + 4 = 9$), для *b* – восьми ($1 + 4 + 3 = 8$) и для *в* – семи ($1 + 4 + 2 = 7$). Это и есть ответы в «демократической» головоломке.

На рисунке 12,*a* расстановка наибольшего числа фигур для *a* – девять. Каждый ферзь угрожает четырем, т.е. половине остальных фигур (а конь вообще нападает на все фигуры). Рекордная расстановка для *b* получается из данной удалением коня. Теперь каждый ферзь угрожает четырем из остальных семи, т.е. большинству.

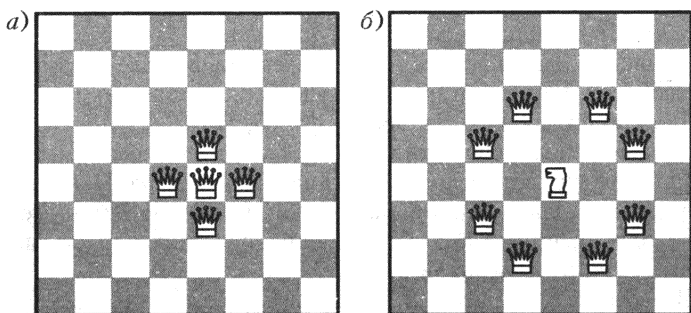


Рис.12. Демократия на шахматной доске

Чуть сложнее обстоит дело для *в*. Можно доказать, что нас устраивают только пять фигур и не больше.

На рисунке 12,*б* каждый ферзь угрожает трем или четырем другим, т.е. не меньше чем $2/3$ ($4 \times 2/3 = 2,66...$) остальных ферзей – условие *в*) выполнено. Все приведенные рекорды абсолютные, улучшить их невозможно.

Можно ли расставить на доске весь комплект фигур и пешек одного цвета так, чтобы никакая фигура (пешка) не била другую?

Одна из возможных расстановок показана на рисунке 13.

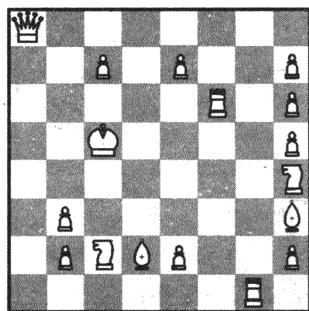


Рис.13. Ни одна фигура не угрожает другой

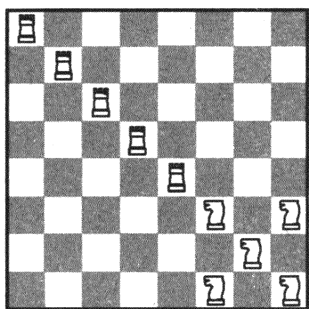


Рис.14. Мирные ладьи и кони

Можно ли расставить на доске: а) пять ладей и пять коней; б) шесть ладей и шесть коней так, чтобы ни одна фигура не била другую?

В первом случае расстановка существует (рис.14), во втором – нет. И правда, если поставить на доске шесть мирных ладей, то придется исключить из рассмотрения шесть вертикалей и шесть горизонталей. Всего в запасе останется четыре свободных поля, а коней – шесть!

А вот головоломка на расстановку сказочных фигур.

Разместить на доске четырех магараджей (ходит как ладья и слон) и четырех канцлеров (ходит как ладья и конь) так, чтобы фигуры не угрожали друг другу.

Приведем одну из возможных расстановок этих восьми нестандартных фигур: магараджей надо поставить на поля a5, b8, g1, h4, а канцлеров – на поля c2, d3, e6, f7.

В нашей книге содержится немало задач с участием одноименных фигур, вот еще один оригинальный подход. Напомним, что в русских шашках на 64-клеточной доске три дамки всегда ловят одну неприятельскую, если она не стоит на «большой дороге», т.е. на диагонали a1-h8.

Известный математик В.Успенский предложил следующее шахматно-математическое обобщение этой шашечной ситуации.

Какое наименьшее число одноименных фигур одного цвета могут поймать одну такую же фигуру противоположного цвета (другие фигуры на доске отсутствуют)?

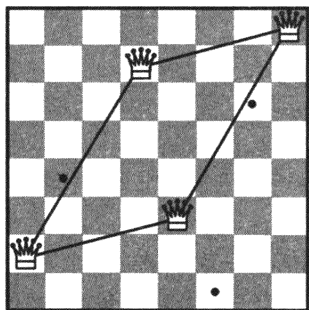


Рис.15. Четыре ферзя ловят одного

Рассмотрим эту задачу для каждой из пяти фигур, предполагая, что сильнейшая сторона – белые.

Ферзи. При пяти белых ферзях, доминирующих на доске (см. рис.9 в главе 4), черному ферзю деться некуда. Однако, оказывается, достаточно и четырех ферзей. Они легко занимают позицию на рисунке 15 (ее предложил А.Ханян; ферзи здесь расположены в вершинах параллелограмма, напоминающего стрелку

компаса, вписанную в квадрат). В распоряжении черного ферзя три свободных поля – b4, f1 и g6, не связанных между собой ходом ферзя. Значит, на каком бы из них ни стоял ферзь, при своем ходе он сразу же попадает под бой.

Ладьи. Шесть белых ладей (а тем более меньше) не могут справиться с одной черной. Действительно, где бы они ни находились, найдутся две свободные горизонтали и вертикали. Четыре поля на пересечении этих линий образуют прямоугольник и не атакованы. При своем ходе черная ладья всегда может перескочить с одного из безопасных полей на другое. А вот семь ладей без труда ловят неприятельскую. Например, снимем на рисунке 1 главы 6 любую белую ладью; черная может стоять только на этом поле и, совершая ход, теряется. (Очевидно, одна черная ладья не помешает семи белым, действующим сообща, занять семь разных вертикалей и горизонталей).

Слоны. Пусть фигуры белополюсные; тогда четыре белых слона, помогая друг другу, занимают доминирующее положение на полях d1, d3, d5 и d7. В результате для белополюсного черного слона на доске не остается свободных полей.

Короли. Два белых короля легко оттесняют неприятельского на край доски, а затем в угол. У того не остается пространства, и он вынужден встать под бой (в данном случае математические правила важнее шахматных).

Кони. Для этого случая составлена компьютерная программа, позволяющая трем белым коням всегда справиться с одним черным. Конечно, белый конь e5 один «выигрывает» у коня h8 при ходе черных; но это исключение из правила.

Итак, проблема Успенского полностью решена!

ХИТРЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

Одной из самых известных головоломок является игра «Пятнанадцать», придуманная С.Лойдом. Она относится к так называемым перестановочным и поддается строгому математическому исследованию.

В коробочке 4×4 находятся пятнадцать квадратов, занумерованных числами от 1 до 15 (одно из возможных расположений показано на рис.1,*а*). Требуется, не вынимая квадраты из

<i>а)</i>	1	2	3	4
	5	6	7	8
	9	10	11	12
	13	15	14	

<i>б)</i>	1	2	3	4
	5	6	7	8
	9	10	11	12
	13	14	15	

коробочки, переставить их так, чтобы все номера следовали в возрастающем порядке (рис. 1,*б*).

За решение головоломки в начальной «позиции» на рисунке 1,*а* Лойд назначил большую денежную премию. Правда, он

ничем не рисковал, так как предварительно доказал, что задание невыполнимо. Всего существует $16!$ расположений квадратов, и все они распадаются на два равных по численности класса. Расположения первого приводятся при помощи перестановок к искомому виду на рисунке 1,*б*, а расположения второго – нет, их удастся привести к виду на рисунке 1,*а*, где у двух квадратов 14 и 15 порядок нарушен.

Чтобы определить, к какому из двух классов принадлежит данное положение, надо подсчитать общее число транспозиций в нем. Говорят, что два квадрата образуют транспозицию, если квадрат с большим номером предшествует квадрату с меньшим. Если число транспозиций четно, то положение относится к первому классу (на рисунке 1,*б* оно равно нулю), а если нечетно, то ко второму (на рисунке 1,*а* одна транспозиция). Идея доказательства заключается в том, что четность числа транспозиций не меняется при любой перестановке ладей, но правильными ходами их число можно уменьшить, доведя в конце концов, соответственно, до 0 или 1.

Переведем теперь игру «Пятнанадцать» на шахматный язык.

На доске 4×4 расставлены 15 пронумерованных ладей (рис.2). Переставьте эти лады так, чтобы они расположились в возрастающем порядке номеров.

Так как ходы ладей совпадают с перестановками квадратов в «Пятнадцати», эта задача, как говорят математики, изоморфна игре Лойда. Иначе говоря, существование решения зависит от числа транспозиций ладей в исходной позиции. В данном случае оно равно двум (ладья a1 стоит впереди ладей b1 и c1), и, значит, необходимая перестановка существует. Вот возможное решение, которое содержит 36 ходов (указаны ладьи, которые делают очередной ход):

1-36. ♜c1, ♜b1, ♜a1, ♜a2, ♜b2, ♜c2, ♜d2, ♜d1, ♜c1, ♜b1, ♜b2, ♜c2, ♜d2, ♜d1, ♜c1, ♜c2, ♜d2, ♜d1, ♜c1, ♜b1, ♜b2, ♜c2, ♜c1, ♜b1, ♜b2, ♜c2, ♜c1, ♜d1, ♜d2, ♜c2, ♜b2, ♜a2, ♜a1, ♜b1, ♜c1, ♜d1. Все ладьи на своих местах!

Эту задачу о ладьях можно обобщить для любых досок. Так, на обычной доске все позиции с 63 пронумерованными ладьями тоже распадаются на два класса: в одном их можно расположить в возрастающем порядке, в другом – нет. Любопытно, что такая же ситуация имеет место и для коней: в половине случаев 63 занумерованных коня можно расположить в возрастающем порядке, а в половине – нет. Для ферзей и королей необходимая перестановка возможна всегда, а для слонов задача лишена смысла, так как они не могут поменять своего цвета.

Рассмотрим ряд других перестановочных задач. В «пистолете» Т. Доусона на рисунке 3 фигурам довольно тесно, и поэтому механизм приводится в действие в течение 20 ходов (ладья за это время занимает место короля), и только затем раздается выстрел.

Перечислим белые фигуры в том порядке, в каком они натягивают пружину (в распоряжении неприятельского короля всего два поля, на которых он ждет своей участи): **1-20.** ♔, ♖, ♔, ♖, ♔, ♖, ♔, ♖, ♔, ♖, ♔, ♖, ♔, ♖, ♔, ♖, ♔, ♖, ♔, ♖, ♔ и, наконец, **21.** ♖: ♔×

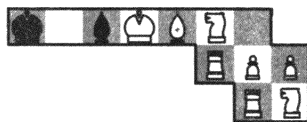


Рис. 3 Пистолет Доусона. Мат в 21 ход

В следующих трех «зигзагах», придуманных около 100 лет назад шахматным композитором В. Шинкманом (рис. 4), играют

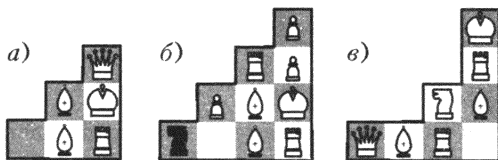


Рис. 4 Зигзаги Шинкмана

только белые, и задание нужно выполнить за наименьшее число ходов.

а) Перейдите королем с c2 на a1, не проходя через поле b2.

б) Возьмите королем коня, не становясь под шах (черный конь неподвижен).

в) Поменяйте местами короля и ферзя.

а) Цель достигается за 26 ходов: **1-26.** ♔, ♖, ♗, ♕, ♜, ♙, ♚, ♛, ♞, ♟, ♠, ♡, ♢, ♣, ♤, ♥, ♦, ♧, ♨, ♩, ♪, ♫, ♬, ♭, ♮, ♯, ♰, ♱, ♲, ♳, ♴, ♵, ♶, ♷, ♸, ♹.

б) Король уничтожает коня за 27 ходов: **1-27.** ♔, ♖, ♙, ♔, ♖**c2-c1** (требуется уточнение, так как на c2 могут встать две ладьи) ♔, ♖, ♖**d1-c1**, ♔, ♖, ♔, ♙, ♔, ♙, ♙, ♔, ♖, ♔, ♖**c3-c2**, ♔, ♙, ♖, ♙, ♖**c2-d2**, ♔, ♙, ♙**b1:a1**.

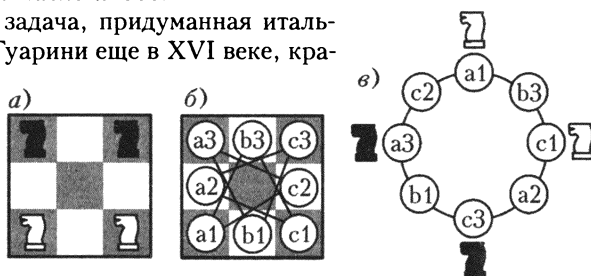
в) Авторское решение последнего зигзага занимало 107 ходов. Но потом оно неоднократно улучшалось, и на сегодняшний день рекорд почти втрое короче – 45 ходов: **1-45.** ♖, ♙, ♖ d3-d2, ♙, ♖, ♙, ♖, ♙, ♖, ♙, ♖, ♙ d1-d2, ♙, ♖, ♖, ♖ d2-d3, ♙, ♖, ♗, ♙, ♗, ♖, ♗, ♙, ♗, ♙, ♖ d4-d3, ♙, ♙, ♖, ♙, ♗, ♙, ♗, ♙, ♖ d3-d2, ♗, ♙, ♗, ♖, ♙, ♖.

Любопытно, что только в наши дни с помощью компьютера доказано, что все три приведенные решения действительно кратчайшие.

Займемся теперь перестановочными задачами, которые носят более математический характер. Начнем с одной старинной головоломки.

В углах доски 3×3 стоят два белых и два черных коня (рис. 5, а). Поменяйте местами белых и черных коней за наименьшее число ходов.

Эта задача, придуманная итальянцем Гуарини еще в XVI веке, кра-



ного (на него кони не могут попасть), по пуговице (на рисунке 5,б роль пуговиц играют кружки). Если между двумя какими-то полями возможен ход конем, свяжем соответствующие пуговицы нитью (их заменяют отрезки прямой). Полученный клубок пуговиц и нитей распутаем так, чтобы все пуговицы расположились по кругу (рис.5,в).

Теперь решение головоломки находится без труда. Выбрав одно из направлений по кругу, надо переставлять коней до тех пор, пока они не поменяются местами. Необходимое перемещение по доске получается обратной заменой пуговиц полями. Кратчайшее решение состоит из 16 ходов, причем белые и черные кони могут ходить по очереди, не угрожая друг другу. Достаточно следить за тем, чтобы фигуры разного цвета не оказались в клубке соседями.

Пусть круговое движение (по часовой стрелке) начинает белый конь а1, вот искомая перестановка: **1-16. ♐ а1-б3, с3-б1, с1-а2, а3-с2, б3-с1, б1-а3, а2-с3, с2-а1, с1-а2, а3-с2, с3-б1, а1-б3, а2-с3, с2-а1, б1-а3, б3-с1.**

Метод пуговиц и нитей легко интерпретировать в терминах теории графов. Вершины графа, как обычно, соответствуют полям доски (пуговицам), а ребра – возможным ходам между ними (нитьям). Распутывание клубка есть не что иное, как более наглядное и удобное расположение графа на плоскости. Убедимся, что метод Дьюдени можно использовать для решения различных головоломок на перестановки.

Поменяйте местами белых и черных коней на доске 3×4 (рис. 6,а).

Хотя доска здесь побольше, и у каждой стороны не по два, а по три коня, метод пуговиц и нитей позволяет без труда добиться цели. Распутанный клубок показан на рисунке 6,б. Внимательно исследовав его, получаем 22-ходовое решение: **1-22. ♐ а1-б3, а4-б2, б1-с3, б4-с2, с1-а2, с4-а3, б3-с1, б2-с4, с3-а4, с2-а1, а2-с3, а3-с2, с1-а2, с4-а3, а4-б2, а1-б3, с3-а4, с2-а1, а2-б4, а3-б1, б2-с4, б3-с1.** Белые и черные кони опять ходили по очереди и ни разу не нападали друг на друга.

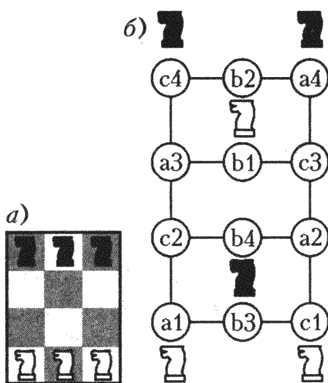


Рис.6. Белые и черные кони меняются местами



Рис 7 Долгие маневры коней

Если мы имеем дело с досками 3×3 и 3×4 , го графы на рисунках 5, в, 6, б пригодны для любой начальной расстановки коней.

Поменяйте местами белых и черных коней (рис.7).

Необходимая перестановка занимает 38 ходов: 1-38. ♔ c2-a3, c3-a2, b1-c3, b4-c2, a3-b1, a2-b4, c1-a2, c4-a3, b3-c1, b2-c4, a1-b3, a4-b2, c3-a4, c2-a1, a2-c3, a3-c2, c1-a2, c4-a3, b3-c1, b2-c4, a4-b2, a1-b3, c3-a4, c2-a1, b1-c3, b4-c2, a2-b4, a3-b1, c1-a2, c4-a3, b2-c4, b3-c1, a4-b2, a1-b3, c3-a4, c2-a1, a2-c3, a3-c2. Белые и черные кони ходили по очереди, причем соблюдалась определенная симметрия.

Доска на рисунке 8, а имеет довольно причудливую форму, но для метода пуговиц и нитей это не является препятствием.

Чтобы найти перестановку белых и черных коней (на сей раз им разрешается нападать друг на друга), вновь распутаем клубок пуговиц и нитей (рис.8, б). Анализируя ситуацию, нетрудно обнаружить, что поле c3 является транзитным – связь

между двумя ветками полей возможна только через него. Для достижения цели осуществляются следующие маневры.

Сначала три коня левой ветки – a4, b2, d3 – через транзит на c3 переправляются на правую – поля b1, a3, c2. Теперь черный конь a2 перебирается на d3, а белые кони возвращаются на левую ветку – a4, b2. Далее второй черный конь, c2, временно располагается на a2 и пропускает белых на правую ветку – b1, a3. Наконец конь a2 проходит на b2, а белые кони занимают поля a4, a2. Все на местах! Приведенный «план» не очень сложен, но для его выполнения требуется 40 ходов.

Кстати, поля a1 и b3 не используются в решении, и их можно вырезать, что придаст доске еще более странный вид. Подобные необычные доски мы еще встретим ниже (см. рис.11).

При решении перестановочных задач на досках большего размера применить метод пуговиц и нитей труднее, но иногда вполне возможно.

Поменяйте местами коней на доске 4×4 (рис.9, а).

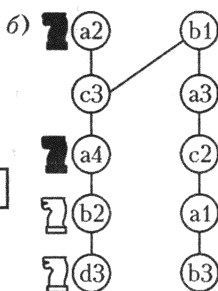
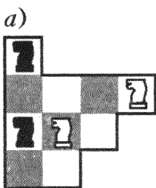


Рис.8. Перемещение коней через транзит



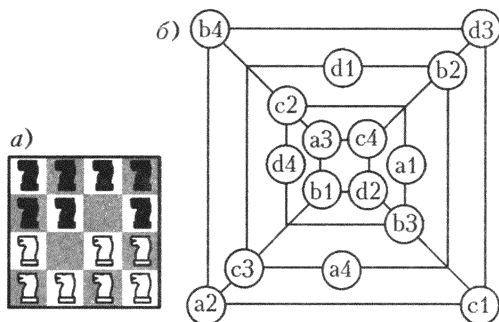


Рис.9 Маневры по четырем кольцам

«Распутаем» доску 4×4 так, как показано на рисунке 9,б. Кони меняются местами следующим образом. Сначала происходит движение по внешнему кольцу: ♞ **a2-c3, c1-a2, d3-c1, b4-d3, a2-b4, c1-a2, d3-c1, d1-b2, b2-d3**. Затем «крутится» третье по величине кольцо: ♞ **c4-b2, a3-c4, c2-a3, d4-c2, b3-d4, a1-b3, c2-a1, d4-c2, b3-d4, d2-b3**. Далее кони идут по самому маленькому кольцу: ♞ **c4-d2, a3-c4, b1-a3, c3-d1, a4-c3, c3-b1**. Еще три хода: ♞ **d1-c3, c3-a4, b2-d1**, и цель достигнута!

В этом старинном решении перемещение коней заняло 28 ходов. В дальнейшем рекорд был улучшен на шесть ходов: **1-22. ♞ b1-c3, c4-b2, d2-c4, a3-b1, c2-a3, b3-d2, a1-c2, d4-b3, c2-d4, b3-a1, c1-b3, b4-c2, a2-b4, d3-c1, b4-d3, c3-a2** (единственное нарушение очередности ходов), **a4-c3, a2-b4, c3-a2, d1-c3, b2-d1, c3-a4**.

Если «распутать» доску 5×5 (рис. 10), то на ней нетрудно найти маршрут коня по всем полям доски (классическая задача!). С c3 он прыгает, например, на a4, обходит внутреннее кольцо по часовой стрелке, доходит до c5, перескакивает на d3 и снова идет по часовой стрелке по внешнему кольцу, заканчивая

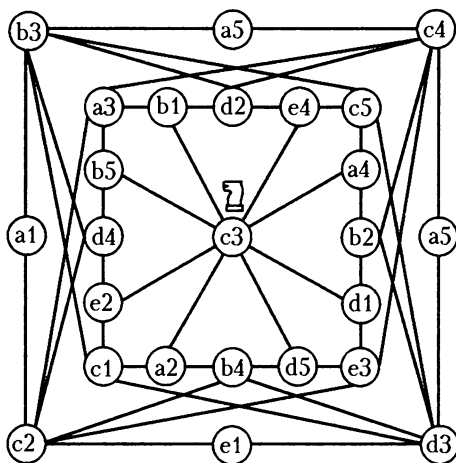


Рис.10 Клубок для доски 5×5

Конечно, метод пуговиц и нитей не удастся применить в игре «Пятнадцать» или в рассмотренных выше зигзагах Шинкмана. А вот современный мастер головоломок В. Красноухов придумал целую серию зигзагов (опять же с конями), для решения которых метод Дьюдени работает безотказно. Вот три его наиболее оригинальных зигзага (рис. 11).

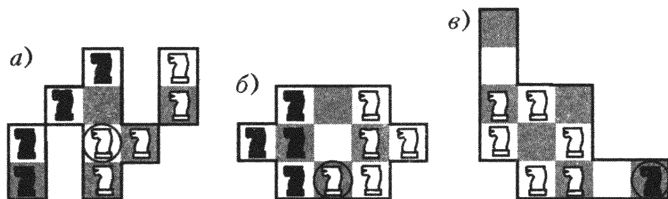


Рис.11. Зигзаги Красноухова

б) Коня с1 переставьте на с3 (другие кони остаются на местах).

в) Коня e1 переставьте на a5 (все белые кони возвращаются на места).

Развязанные клубки пуговиц и нитей для трех этих задач показаны на рисунке 12.

а) Если переставлять все фигуры по большому кругу, то в конце концов конь с2 окажется на с3. Это долго, и не на всех полях окажутся кони нужного цвета. Решение более хитрое, причем цель (показана пунктирной стрелкой) достигается за 37 ходов. Поскольку на доске всего одно свободное поле, достаточно указывать только коня, который делает очередной ход.

1-18. ♖a2, c1, b3, a1, c2, e3, c4, d2, e4, c3, a2, c1, b3, a1, c2, e3, c4, d2. Пока все кони перемещались по часовой стрелке.
19. ♜b3! Но в нужный момент используется внутренняя нить, и кони начинают обратное движение, против часовой стрелки!
20-37. ♜c1, a2, c3, e4, d2, c4, e3, c2, a1, b3, c1, a2, c3, e4, d2, c4, e3, c2. Задача решена.

б) Опять имеется всего одно поле для маневров (с2 не в счет, оно недоступно коням): **1-18. ♖e2, c1, a2, c3, d1, b2, d3, c1, a2, c3, d1, b2, d3, c1, a2, c3, e2, c1.**

в) Подобная головоломка уже встречалась у нас (см. рис.8),

но из развязанного клубка пуговиц и нитей видно, что в данном случае вместо одного транзитного поля используется целая ветка – а4, b2, c3, d1. По ней перемещение коней не однозначно, поэтому указываются только начальное и конечное поля каждого участка движения (а в скобках – количество ходов).

Итак, чтобы перевести черного коня с е1 на а5, а первоначальное положение белых коней не изменилось, необходимо 64 (!) хода: **1-64.**
 ♖ b1-b2 (3), ♜ a3-a4 (3), c2-d1 (4), b3-a5 (1), c1-b3 (1), a2-c1 (1), e1-a2 (5), d1-e1 (5), a4-c2 (4), b2-a3 (4), a2-b1 (2), c1-d1 (3), b3-b2 (5), a5-a4 (5), b1-a5 (5), a4-b3 (4), b2-c1 (4), d1-a2 (2), a3-b1 (1), c2-a3 (1), e1-c2 (1).

И, наконец, еще один зигзаг Красноухова – на той же доске (рис.11, в), но теперь с участием и коней, и ладей (рис.13). Здесь черный конь тоже должен перескочить на а5, а остальные фигуры – вернуться на свои места. Появление ладей серьезно удлиняет решение – на сей раз потребуется более 80 ходов! Вот как происходит необходимая перестановка: **1-81.**
 ♜ a5, ♜ cb3, ♖ b1-c3-a4, ♜ a3-b1-c3-d1, ♖ c2-a3-b1-c3, ♖ e1-c2-a3-b1, ♜ c2, ♜ a3, ♖ b2, ♖ a4, ♖ c1-b3, ♖ a2-c1, ♖ b1-c3-a2, ♖ a4-c3-b1, ♜ a4, ♜ c3, ♖ b1-a3-c2-e1, ♜ c2, ♖ d1-c3-b1-a3, ♖ b2-d1-c3-b1, ♖ a2-c3-d1, ♜ b2, ♖ a3-c2, ♖ b1-a3, ♖ c1-a2-c3-b1, ♖ b3-c1-a2-c3 ♖ a5-b3-c1-a2, ♜ a4-a5, ♜ b2-b3, ♖ c3-

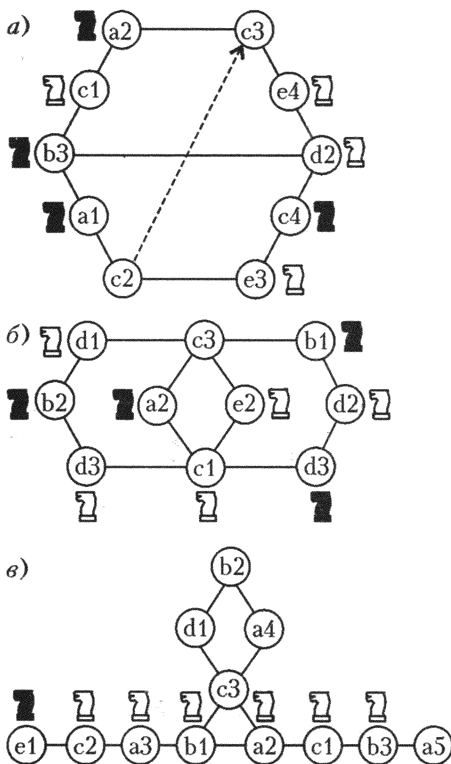


Рис.12. «Развязанные» зигзаги

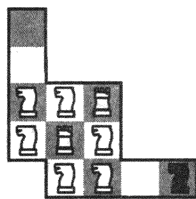


Рис.13. Белые ладьи и кони уступают дорогу

a4-b2, ♖a2-c3-a4, ♖d1-c3-a2-c1, ♖b1-c3-a2, ♖a3-b1, ♖c2-a3, ♜c3-c2, ♖c1-b3, ♖a2-c1, ♖b1-c3-a2, ♖a3-b1, ♖a4-c3, ♜a3, ♖a5, ♖c1-b3, ♖a2-c1, ♜a3-a2, ♖b1-a3, ♖b2-a4, ♜ab2, ♖c3-b1, ♖a4-c3-a2, ♜c3, ♖e1-c2. Все на местах!

Следующую головоломку, тоже с участием коней, Лойд считал одной из самых своих трудных. Он гордился тем, что мало кому из его друзей удавалось переправить коней «через Дунай» (вертикаль «е»).

Переход через Дунай. Как в положении на рисунке 14,а быстрее всего переставить белых коней с ферзевого фланга на королевский (вертикали «е», «f», «g», «h»), а черных – с королевского на ферзевый (вертикали «a», «b», «с»)? Очередность ходов соблюдать не обязательно, но коням запрещено отступать (белым – влево, черным – вправо), и, кроме того, на каждой вертикали всякий раз может находиться только один конь.

Распутанный клубок пуговиц и нитей показан на рисунке 14,б, в кружках (пуговицах) записаны вертикали доски, и

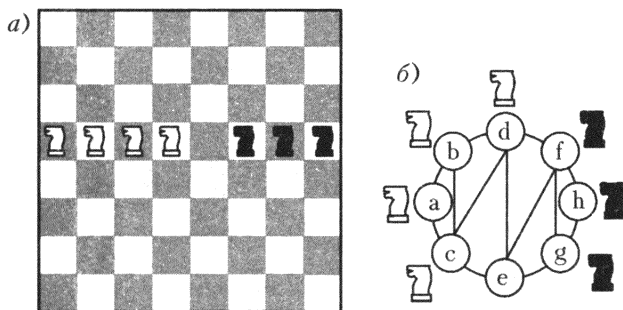


Рис 14 Переход через Дунай

кружки связаны нитью в том случае, если между вертикалями возможен ход конем.

Цель достигается за 19 ходов. Чтобы предельно сократить их число, надо умело использовать внутренние нити. Поскольку безразлично, на какую половину доски, верхнюю или нижнюю, попадают кони, достаточно указать сами вертикали: **1-19. de** (на первом же ходу используется внутренняя нить), **fd, gf, eg, ce, bc, db, fd, hf, gh, eg, ce, ac, ba, db, fd, ef, ce, dc.** Ни один конь ни разу не отступал, и река Дунай покорена!

Кони достаточно скакали в этой главе. В заключение несколько головоломок с участием слонов, ферзей и ладей.

На доске 4×5 (рис.15) поменяйте местами белых и черных слонов так, чтобы они ходили по очереди и никакие два не угрожали друг другу.

Необходимая перестановка состоит из 36 перемещений слонов, поровну белых и черных:

1-36. ♖ c1-b2, b5-c4, b1-c2, c5-b4, b2-d4, c4-a2, c2-d3, b4-a3, d1-a4, a5-d2, a4-b5, d2-c1, d4-c3, a2-b3, d3-b1, a3-c5, c3-a5, b3-d1, a1-c3, d5-b3, b5-d3, c1-a3, c3-d2, b3-a4, d3-c4, a3-b2, b1-a2, c5-d4, d2-b4, a4-c2, c4-b5, b2-c1, a2-d5, d4-a1, b4-c5, c2-b1, и все в порядке!

За сколько ходов четыре белых ферзя на рисунке 16 могут попасть на ферзевый фланг, а три черных – на королевский, если никакие два не должны угрожать друг другу?

Ферзи перестраиваются за 13 ходов: **1-13.** ♕ a3-a1, ♕ h6-h3, ♕ f2-d2, ♕ a1-f6, ♕ h3-a3, ♕ b5-h5, ♕ f6-f1, ♕ c7-b6, ♕ d2-d7, ♕ e4-c2, ♕ f1-e1, ♕ b6-f6, ♕ g8-b8. Очевидно, при восьми ферзях задание невыполнимо, так как первое же перемещение любого из них приведет к взаимному нападению.

На первой горизонтали стоят восемь белых ферзей, а на последней – восемь черных. За какое наименьшее число ходов ферзи противоположного цвета могут меняться местами, если они ходят по очереди?

Из пары ферзей одной не крайней вертикали тот, который пойдет первым, вынужден сделать не меньше двух ходов; шесть таких пар затратят не меньше 18 ходов. Из четырех угловых ферзей тот, который пойдет первым, тоже сделает не меньше двух ходов – еще 5. Вот необходимая перестановка ферзей (12 белых и 11 черных): **1-23.** ♕ c1-a3, d8-a5, f1-h3, e8-h5, d1-d8, c8-c1, e1-e8, f8-f1, a3-f8, a5-e1, h3-c8, h5-d1, g1-h2, h8-h5, a1-h8, a8-a1, b1-a2, b8-b1, h2-b8, g8-g1, h1-a8, h4-h1, a2-g8.

Поставить мат черному королю (рис.17), чтобы выполнялись три условия: а) матует ладья №8; б) ладьи не покидают выделенного квадрата 3×3 (исключение только для последней

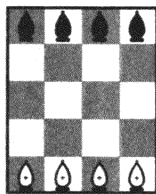


Рис.15 Задача о перестановке слонов

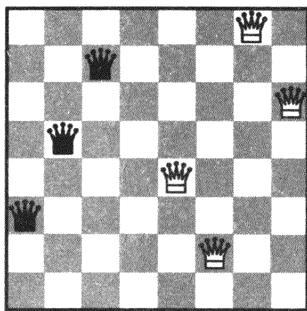


Рис.16 Задача о перестановке ферзей

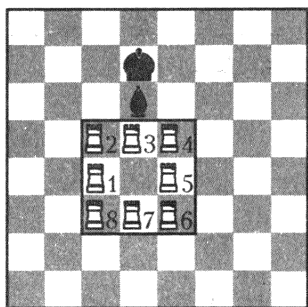


Рис 17 Задача о перестановке ладей

3, 5, 4, 3, 1, 8, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 8, 2, 1, и ладья №8 берет слона с матом.

го хода); в) в заключительной позиции ладьи располагаются по кругу в той же последовательности, что и в начале.

Если бы задача была чисто шахматной, мат ставился бы сразу – 1. ♖:d6×, но особые условия усложняют дело, и мат дается только на 32-м ходу. Укажем номера ладей в том порядке, в каком они ходят (у черных выбор невелик – ♜ d7-d8 и обратно): 1-32. 5, 6, 7, 5, 6, 4, 3, 6, 4, 7, 5, 4, 7, 3, 6, 7,

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕКОРДЫ

Хотя большинство задач и головоломок, о которых шла речь до сих пор, так или иначе связаны с разными рекордами, настоящая глава целиком посвящена математическим рекордам на шахматной доске. Какие-то из них можно считать абсолютными, а какие-то, возможно, будут побиты читателями.

Прежде всего упомянем имена американца Сэмюэля Лойда и англичанина Генри Дьюдени, с головоломками которых мы уже встречались выше. Многие творения этих классиков занимательного жанра конца XIX века до сих пор остаются непревзойденными.

Головоломки Лойда более популярны, а его игра «Пятнадцать», упомянутая в предыдущей главе, имеет мировую известность. И в творчестве Дьюдени шахматная математика занимает важное место. Достаточно вспомнить его метод пуговиц и нитей, также рассмотренный в главе 10.

Задача на рисунке 1 является как бы совместным произведением двух великих изобретателей головоломок.

Трехходовка (первое задание) принадлежит Лойду. 1. d4 ♘h5 2. ♖d3 и 3. ♖h3×; 1... ♘g4 2. e4+ ♘h4 3. g3×.

Дьюдени поставил другой вопрос: как быстрее всего данная позиция может получиться в реальной партии (второе задание)? Поскольку белым нужно взять пятнадцать

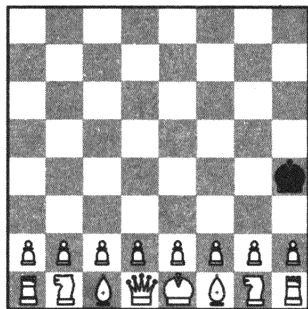


Рис 1 Мат в 3 хода

фигур и пешек противника, а на первом ходу взятие невозможно, решение содержит не менее 16 ходов. Дьюдени разыграл партию, в которой обе стороны делают именно столько: 1. ♘c3 d5 2. ♘:d5 ♘c6 3. ♘:e7 g5 4. ♘:c8 ♘f6 5. ♘:a7 ♘e4 6. ♘:c6 ♘c3 7. ♘:d8 ♖g8 8. ♘:f7 ♖g6 9. ♘:g5 ♖e6 10. ♘:h7 ♘b1 11. ♘:f8 ♖a3 12. ♘:e6 b5 13. ♘:c7+ ♘f7 14. ♘:b5 ♘g6 15. ♘:a3 ♘g5 16. ♘:b1 ♘h4. Ход белых, и тут в игру вступает Лойд...

А абсолютный рекорд был установлен уже в наше время. В двух партиях сэкономлено полхода! Правда, в финале играют черные и трехходового мата уже нет.

1. ♖a3 (c3) b5 2. ♜:b5 ♖f6 3. ♜:a7 ♜e4 4. ♜:c8 ♜c3 5. ♜:e7 c6 6. ♜:c6 ♜b1 7. ♜:b8 ♜a3 8. ♜:d7 g5 9. ♜:f8 ♜d6 10. ♜:h7 ♜e7 11. ♜:g5 ♜h4 (c8) 12. ♜:f7 ♜c4 13. ♜:d6 ♜f6 14. ♜:c4 ♜g5 15. ♜:a3 ♜h4 16. ♜:b1.

1. ♜c3 d5 2. ♜:d5 g6 3. ♜:e7 b5 4. ♜:g6 a6 5. ♜:h8 ♜d7 6. ♜:f7 ♜g5 7. ♜:g5 ♜f6 8. ♜:h7 ♜e4 9. ♜:f8 ♜c3 10. ♜:d7 ♜b1 11. ♜:b8 ♜f7 12. ♜:a6 ♜g6 13. ♜:c7 ♜h5 14. ♜:b5 ♜a3 15. ♜:a3 ♜h4 16. ♜:b1.

Любопытно, что h4 – единственное поле, на котором одинокий черный король (при белых фигурах на исходных местах) получает мат так быстро. А вот при его симметричном расположении на другом фланге (рис.2) дело затягивается на два хода.

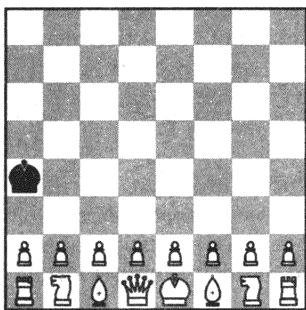


Рис.2 Мат в 5 ходов

Эту задачу придумал К.Фабель.
1. c4+ ♜b4! (1... ♜a5 2. ♜b3 ♜a6 3. ♜b8 ♜a5 4. ♜b5×) 2. d4 ♜a5 (2... ♜:c4 3. e4+ ♜b4 4. ♜d2×) 3. ♜b3 ♜a6 4. ♜b8 ♜a5 5. ♜b5×.

Заметим, что при полном комплекте белых фигур в распоряжении черного короля имеется 40 полей (первые три горизонтали ему недоступны). Во сколько же ходов удастся заматовать короля на каждом из них? Этим вопросом заинтересовался А.Ханян, установивший, что «надежнее» всего черный король чувствует себя в самом центре доски, на поле e4 – здесь его удастся заматовать только на седьмом ходу, например: 1. d4 ♜d5 2. ♜d3 ♜d6 3. ♜h7 ♜e6 4. e4 ♜d6 5. ♜b5 ♜e6 6. ♜g5 ♜d6 7. ♜e7×.

А если король стоит на своем законном месте e8, то мат дается на шестом ходу. Но, самое интересное, что на других полях он тоже получает мат в 6 ходов (конечно, предполагается, что обе стороны играют наилучшим образом). Таким образом, при белых фигурах на исходных местах у неприятельского короля три исключения – на a4, e4 и h4 (мат, соответственно, в 5, 7 и 3 хода), на всех остальных полях следует мат в 6 ходов.

Фабель доказал, что позиция на рисунке 2 тоже может возникнуть после 16-го хода белых: 1. ♖a3 (c3) b5 2. ♜:b5 ♖f6 3. ♜:a7 ♜e4 4. ♜:c8 ♜c3 5. ♜:e7 c6 6. ♜:c6 ♜b1 7. ♜:b8 ♜a3 8. ♜:d7 g5 9. ♜:f8 ♜d6 10. ♜:h7 ♜d7 11. ♜:g5 ♜h4 (c8) 12. ♜:f7 ♜c4 13. ♜:d6 ♜c6 14. ♜:c4 ♜b5 15. ♜:a3+ ♜a4 16. ♜:b1.

Итак, за 15 с половиной ходов с доски исчезают все черные фигуры. А полное истребление фигур обоих цветов занимает всего на ход больше: 1. e4 d5 2. ed ♖:d5 3. ♜ d3 ♖:a2 4. ♜ :h7 ♖:b1 5. ♜ :g8 ♖:c1 6. ♜ :f7+ ♜ :f7 7. ♜ :a7 ♖:c2 8. ♜ :b7 ♜ :h2 9. ♜ :b8 ♜ :g2 10. ♖:c2 ♜ :g1+ 11. ♜ :g1 ♜ :b8 12. ♖:c7 ♜ :b2 13. ♖:c8 ♜ :d2 14. ♖:f8+ ♜ :f8 15. ♜ :g7 ♜ :f2 16. ♜ :e7 ♜ :e7 17. ♜ :f2.

Перед началом партии вы высыпаете фигуры на стол и расставляете их на доске. Сколькими способами можно получить начальную расстановку?

Каждая сторона может поставить короля и ферзя единственным способом; ладей, слонов и коней — двумя, а для пешек существует 8! вариантов. Таким образом, и белые фигуры, и черные можно расставить $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 8!$ способами. Учитывая, что партнеры могут поменять цвет фигур, окончательно получаем $2 \times (8 \times 8!)^2$ расстановок фигур перед началом партии.

С давних пор не раз предлагалось модифицировать игру, изменяя исходное расположение фигур, но оставляя их за частоколом пешек. Тогда возникает вопрос.

Сколько существует начальных расстановок фигур на доске, удовлетворяющих этому условию?

Здесь интересен не сам процесс расстановки, а начальное положение для игры, и расстановки одноименных фигур на фиксированных полях доски не различаются одна от другой. Перед нами классическая комбинаторная задача — на подсчет так называемых перестановок с повторениями. Она формулируется следующим образом.

Сколькими способами можно расположить на n местах n предметов k типов, если элементы одного типа одинаковы, а число элементов k -го типа равно n_k ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)?

Доказано, что число искомых перестановок равно $n! / (n_1! n_2! \dots n_k!)$. Для белых фигур в нашей шахматной задаче (предметы — фигуры): имеем: $n = 8$, $k = 5$ (пять типов фигур — король, ферзь, ладьи, слоны и кони), при этом $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = n_4 = n_5 = 2$, и число расстановок составляет $8! / (1! 1! 2! 2! 2!) = 7! = 5040$. Если черные ставятся симметрично, то это и есть искомое число. Если же черные фигуры ставить произвольным образом, независимо от белых, то число расстановок равно 5040^2 . В шахматах Фишера (они будут упомянуты в последней главе) есть ряд дополнительных ограничений — фигуры обоих цветов симметричны, слоны разноцветные и ладьи стоят по разные стороны от короля — и поэтому число расстановок существенно уменьшается, всего их 960.

Пусть партия началась. Самый быстрый мат возможен уже на втором ходу: **1. f4 e5 2. g4 ♖h4×**. Очевидно, существует восемь партий такого типа – с матом белому королю на втором ходу. Черные аналогичный мат получают на третьем ходу: **1. e4 f6, 2...g5 3. ♜h5×**. Всего таких партий с матом ферзем на h5 существует 305, причем имеется 347 способов заматовать короля на третьем ходу. А теперь одна шахматно-геометрическая задача.

Как быстрее всего ставится мат в исходном положении при условии, что обе стороны делают самые длинные в геометрическом отношении ходы?

Рекордные партии с обычным матом нас не устраивают. Ход пешки на два поля вперед имеет длину 2, а ход конем, как мы знаем, по теореме Пифагора, равен $\sqrt{5}$, поэтому надо начинать с коня.

Сначала было предложено такое незамысловатое решение: **1. ♖f3 ♖f6 2. ♖d4 ♖d5 3. ♖e6 ♖f4 4. ♖:f8 ♖g6 5. ♖e6 ♖f8 6. ♖:g7×**. Но Ханянь побил рекорд на полхода: **1. ♖c3 ♖f6 2. ♖b5 ♖g4 3. ♖d6+! ed 4. ♖f3 ♜h4 5. ♖g5!** (рис.3,а). Отрезая черному ферзю путь назад. Его ход на два поля по диагонали равен $2\sqrt{2}$, что длиннее хода коня – $\sqrt{5}$. Значит, черные матуют – **5... ♜:f2×**.

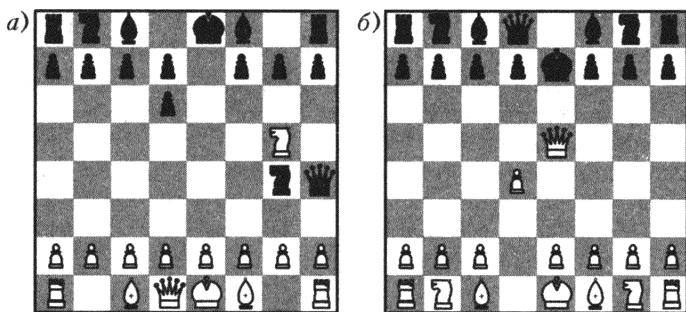


Рис.3. Мат самыми длинными и самыми короткими ходами

Как быстрее всего ставится мат в исходном положении при условии, что обе стороны делают самые короткие ходы?

Рекорд принадлежит В.Хуторному: **1. d3 e6 2. d4 e5 3. ♜d2 ♖e7 4. ♜d3 ♖e6 5. ♜e3 ♖e7 6. ♜e4 ♖e6 7. ♜:e5×** (рис. 3,б).

Конечная цель игры – мат неприятельскому королю. Как мы знаем, быстрее всего мат ставится на втором ходу – белым и на третьем – черным. Однако партия может также закончиться патом. В связи с этим возникает целый ряд вопросов.

Как быстрее всего партия завершается патом?

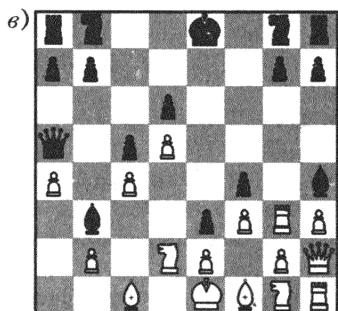
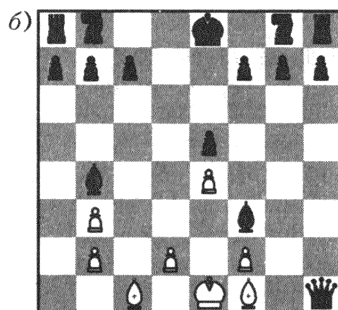
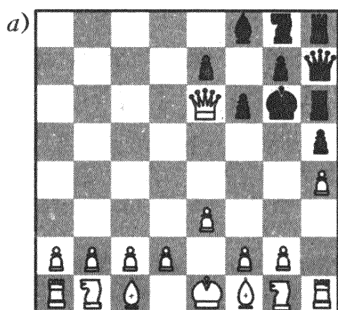
В отличие от мата, при котором только у короля (находящегося под шахом) нет ходов, при пате все фигуры одной из сторон не могут двигаться. Тем не менее, он пат возможен уже на десятом ходу.

1. e3 a5 2. ♖h5 ♘a6 3. ♚:a5 h5 4. ♚:c7 ♘ah6 5. h4 f6 6. ♚:d7+ ♙f7 7. ♚:b7 ♚d3 8. ♚:b8 ♚h7 9. ♚:c8 ♙g6 10. ♚e6 пат (рис.4,а).

Эту рекордную партию Лойд придумал более ста лет назад. Содержащейся в ней идее можно придать и несколько иное оформление: 1. c3 d5 2. ♚b3 h5 3. ♚:b7 ♙f5 4. ♚:a7 ♙h7 5. ♚:b8 ♘a6 6. ♚:c7 ♘ah6 7. h4 f6 8. ♚:d8+ ♙f7 9. ♚:d5+ ♙g6 10. ♚e6 пат. Здесь на h7 замурован не ферзь, а слон черных.

Интересно, что и белые могут быть запатованы в десять ходов: 1. h4 e5 2. c4 d5 3. ♚b3 dc 4. e4 cb 5. ab ♚:h4 6. ♘a4 ♚:h1 7. g4 ♙:g4 9. ♙f3 ♙:f3 9. ♙a3 ♙:a3 10. ♘b4 ♙:b4 пат (рис.4,б).

Потребуем теперь, чтобы ни одна из фигур не была взята. За сколько ходов получается пат в этом случае?



Дополнительное условие затягивает игру всего на два хода: 1. d4 d6 2. ♚d2 e5 3. a4 e4 4. ♚f4 f5 5. h3 ♙e7 6. ♚h2 ♙e6 7. ♘a3 c5 8. ♘g3 ♚a5+ 9. ♙d2 ♙h4 10. f3 ♙b3 11. d5 e3 12. c4 f4 пат (рис.4,в).

Партия со взаимным патом, причем симметричная, длится 18 с половиной ходов: 1. e4 d5

Рис.4. Рекордные паты

ров было приведено немало), но и при троекратном повторении позиции (очередь хода также у одной стороны). Самым распространенным случаем такого повторения является вечный шах. В рекордной партии он возможен уже после третьего хода: **1. f4 e5 2. ♔ f2 ♚ f6 3. ♔ g3 ♚ :f4+** с вечным шахом (♚ f4-h6-f4+).

Итак, мы рассмотрели все варианты рекордно быстрого окончания игры. Теперь возникает противоположный вопрос.

Сколько ходов содержит самая длинная шахматная партия?

То, что партия не может длиться бесконечно, следует хотя бы из правила о троекратном повторении позиции. Число всех возможных позиций на доске конечно, обозначим его через A (при разной очереди хода считаем позиции разными). Очевидно, что за $2A$ ходов на доске сменится $2A + 1$ позиций (включая начальную), и хотя бы одна из общего числа A встретится трижды. В результате – по правилу о троекратном повторении позиции – будет зафиксирован мирный исход (строго говоря, по шахматному кодексу, ничью надо потребовать).

Итак, самая длинная шахматная партия длится не более $2A$ ходов. Найти число A практически невозможно, ведь недостаточно подсчитать число различных расположений фигур на доске, надо еще выяснить, может ли каждое из них возникнуть в реальной игре. Впрочем, число A легко оценить сверху. Однако для получения точного числа ходов в самой длинной партии ниже мы воспользуемся другим ничейным правилом – 50 ходов.

Но прежде вспомним, что еще в начале XX века вместо правила о троекратном повторении позиции действовало правило о троекратном повторении серии ходов. Как будто это несущественно, однако «серийное» правило не мешает партии длиться «до бесконечности», причем ходить могут одни короли.

Пусть, например, белый перемещается по полям a1, a2, b1, a черный – по полям h8, g8, h7 (расположение других фигур не имеет значения). Обозначим ход короля по часовой стрелке через 1, а против часовой через 2. Пусть короли стоят в своих углах, a1 и h8. Всякому их передвижению соответствует последовательность из единиц и двоек. Верно и обратное: любая такая последовательность задает перемещение королей. Например, последовательность 12 21 21 12 21 дает ходы: **1. ♔ a2** (1 – белый идет по часовой стрелке) **1... ♚ g8** (2 – черный идет против часовой) **2. ♔ a1 ♚ h8 3. ♔ b1 ♚ h7 4. ♔ a1 ♚ h8 5. ♔ b1 ♚ h7.**

Так вот, доказано, что имеется бесконечная последовательность цифр 1 и 2, в которой нет трех одинаковых, рядом стоящих групп цифр (последовательность Туэ–Морса). Из этого следует, что существует партия, в которой ни одна серия ходов

не повторяется трижды, по старинному правилу – бесконечная!

Теперь обратимся к правилу 50 ходов. Оно заключается в следующем. Если в течение 50 ходов подряд на доске не было произведено ни одного взятия и ни одна пешка не сдвинулась с места, то партия заканчивается вничью (и здесь не автоматически – ничью надо потребовать). Проведем необходимые расчеты.

Шестнадцать пешек могут сделать самое большее $16 \times 6 = 96$ ходов. Пусть все они сделаны – тогда пешки взяли по крайней мере восемь фигур (чтобы пешкам одной вертикали «пройти сквозь друг друга», нужно хоть одно взятие). Если было сделано ровно восемь фигур, то могут быть взяты еще $2 \times 7 - 8 = 6$ оставшихся фигур и $2 \times 8 = 16$ превращенных, итого $6 + 16 = 22$. Таким образом, общее число взятий и движений пешек не более $96 + 22 = 118$. Очевидно, если число движений пешек меньше 96, то общее число ходов может только уменьшиться. Поскольку между каждыми двумя продвижениями пешек или взятиями может быть сделано не больше 50 ходов, а при последнем взятии партия прекращается (на доске остались одни короли), ее длительность не более $50 \times 118 = 5900$ ходов. Более тонкий, чисто шахматный анализ показывает, что самая длинная партия продолжается на полтора хода меньше – 5898 с половиной – заключительным ходом одинокий белый король забирает единственную оставшуюся фигуру черных. Вывод ясен: бесконечной шахматной партии не существует!

Целая серия рекордных задач связана с конструированием позиций, для которых выполняется одно из следующих условий:

- 1) число возможных ходов наибольшее;
- 2) число возможных взятий наибольшее;
- 3) число возможных шахов наибольшее (включая те, которые ведут к мату);
- 4) число возможных матов наибольшее.

Каждую из рекордных позиций можно конструировать при одном из четырех условий:

- 1) на доске нет превращенных фигур, и превращение пешек не допускается;
- 2) превращенных фигур нет, но пешки могут превращаться;
- 3) могут быть превращенные фигуры, но пешки не превращаются;
- 4) разрешаются нелегальные позиции.

Учитывая, что каждое задание может относиться как к одним белым фигурам, так и к белым и черным вместе, всего получаем $4 \times 4 \times 2 = 32$ задачи на конструирование рекордных позиций. В

Таблица 1

32 рекорда

Тема	Цвет фигур	Без превращенных фигур		С превращенными фигурами без превращения пешек	Нелегальные позиции
		без превращения пешек	с превращением пешек		
Наибольшее число ходов	б б и ч	1) 109 2) 181	3) 144 4) 223	5) 218 6) 324	7) 288 8) 412
Наибольшее число взятий	б б и ч	9) 49 10) 88	11) 68 12) 109	13) 65 14) 116	15) 168 15) 336
Наибольшее число шагов	б б и ч	16) 45 17) 82	18) 52 19) 85	20) 105 21) 142	22) 143 23) 170
Наибольшее число матов	б б и ч	24) 43 25) 68	26) 47 25) 68	20) 105 27) 107	22) 143 22) 143

таблице 1 приведены все 32 известных рекорда. Некоторые из них держатся более ста лет, другие установлены сравнительно недавно. Очевидно, слева направо цифры растут, поскольку требования к позициям снижаются, например, при разрешенном превращении каждое может дать сразу четыре хода. Перед самым рекордом указан номер позиции, под которым она приводится ниже (в трех случаях на одной и той же позиции достигаются сразу два рекорда). Позиции с превращенными фигурами рассматриваются без превращения. Если это ограничение снять, то рекорды можно еще улучшить. Так, если в позиции на рисунке 9 предпоследнюю горизонталь сплошь заполнить белыми пешками, а последнюю – черными конями, то число «белых» взятий достигнет 179. А общее число можно увеличить до 338 заменой четырех коней двумя пешками и двумя ферзями (белые: ♖ a1, ♜ b7; черные: ♜ a8, ♞ b2). Последний столбец касается нелегальных позиций (здесь шахи могут и матовать), которые не получаются в реальной партии – это уже область сказочных шахмат (глава 16).

1) См. рисунок 7,а.

2) Белые: ♖ c2, ♜ e4, ♜ a1, h8, ♜ d6, f7, ♜ e2, f6, ♜ b2, b6, g2; черные: ♜ g7, ♜ g5, ♜ a8, h1, ♜ d7, f2, ♜ c3, d3, ♜ c7, e7, f3.

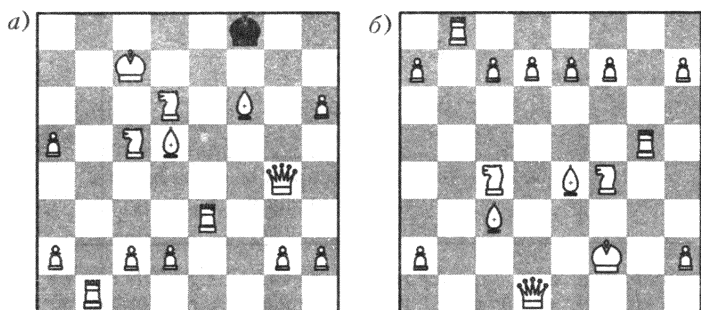


Рис.7. Наибольшее число ходов

3) Белые: ♔ g5, ♚ b6, ♝ a4, c1, ♞ e2, e5, ♜ d5, f5, ♟ b7, d2, d7, f2, f7, h2, h7; черные: ♔ g2, ♚ c8, e8, ♝ g8, ♞ a8, ♟ e3, g3.

4) Белые: ♔ h3, ♚ f4, ♝ e1, g1, ♞ f6, h5, ♜ a1, c1, ♟ a7, c7, d7, f7, h7; черные: ♔ b6, ♚ d5, ♝ a4, e8, ♞ d3, d6, ♟ b8, g8, ♟ b2, d2, f2, h2.

5) Белые: ♔ f1, ♚ a3, b6, c4, d2, d7, e5, f3, g6, h4, ♝ a8, h8, ♞ b1, g1, ♜ c1, d1; черные: ♔ a1, ♟ a2, b2.

6) Белые: ♔ h2, ♚ a6, b8, c1, d8, e1, f8, h3, h5, h7, ♝ g1, ♞ a4; черные: ♔ a2, ♚ a3, a5, b1, c8, d4, e8, f1, g8, h6, ♝ a7, ♞ h1.

7) См. рисунок 8,а.

8) См. рисунок 8,б.

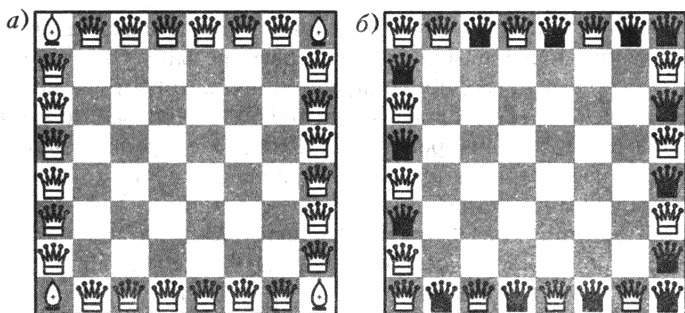


Рис.8. Рекорды для нелегальных позиций

9) Белые: ♔ a6, ♚ d5, ♝ c7, e7, ♞ b6, g6, ♜ d6, f6, ♟ a4, b3, c3, d3, e3, f3, g3, h3; черные: ♔ d2, ♚ h5, ♝ b7, d7, ♞ a5, f7, ♟ c8, e8, ♟ a7, b5, c4, d4, e4, f4, g4, h7.

10) Белые: ♔ e6, ♚ d6, ♝ a1, c3, ♞ e4, f6, ♜ e1, e3, ♟ a4, b4, c4, d4, e2, f4, g4, h4; черные: ♔ d2, ♚ d3, ♝ a3, d1, ♞ e5, f3, ♟ c2, g2, ♟ a5, b5, c5, d5, e7, f5, g5, h5.

11) Белые: ♖g5, ♗h7, ♝d4, e5, ♜e2, ♞d6, f6, ♠b7, c7, d7, e7, f7, g7; черные: ♛b2, ♚d8, ♞e8, h8, ♜c8, f8, ♞b8, g8, ♠c4, d5, e4, f5, h5.

12) Белые: ♖e3, ♗e1, ♝c1, ♜d1, g1, ♞b1, f1, ♠b7, c7, d7, e7, f7, g7; черные: ♛e6, ♚f8, ♞b8, g8, ♜c8, h8, ♞d8, e8, ♠c2, d2, e2, f2, h2.

13) Белые: ♖d8, ♗h3, c5, d3, d7, e1, e5, f3, f7, g5, ♝b7, h8, ♜a5, h3, ♞g3, g7; черные: ♛a8, ♚b5, e3, f1, f5, ♞c7, d1, ♜c3, d5, e8, ♞e7, h5.

14) Белые: ♖a8, ♗b5, c3, d1, d5, e3, e7, f5, g3, ♝c7, g7, ♜a3, f1; черные: ♛h8, ♚b3, c5, d3, d7, e1, c5, f3, g5, ♞b7, f7, ♜c1, h3.

15) См. рисунок 9.

16) Белые: ♖g5, ♗d3, ♝f7, h5, ♜d4, g8, ♞a2, g2, ♠c2, e2; черные: ♛d5, ♚d8 (благодаря черному коню на d8 ни один шах здесь не матует).

17) Белые: ♖f3, ♗e6, ♝b7, c1, ♜a8, d6, ♞a6, c3; черные: ♛c6, ♚d3, ♞f8, g2, ♜e3, h1, ♞f6, h3.

18) Белые: ♖a8, ♗f7, ♝b5, d3, ♜a4, d4, ♞c4, e4, ♠c7, e7; черные: ♛d7, ♜d8, ♞b8, f8.

19) Белые: ♖f2, ♗c7, ♝g5, h7, ♜f1, h4, ♞d1, h1, ♠d7, f7; черные: ♛e7, ♚d2, ♞b6, h2, ♜a7, c8, ♞e8, g8, ♠c2, e2, e4, g2.

20) Белые: ♖a2, ♗b4, b6, d2, d8, f3, f8, g1, g6, h4, ♝a5, c7, ♜b5, b8, ♞a3, h6; черные: ♛e5, ♠a6.

21) Белые: ♖c4, ♗d8, e2, e3, e8, g2, g7, g8, h4, h6, ♜a4, ♞c8; черные: ♛f5, ♚a3, a5, b1, b2, b7, d1, d6, d7, e1, ♜h5, ♞f1.

22) См. рисунок 10.

23) Белые: ♖c4, ♗a1, a2, a4, a6, c1, d8, e2, e3, e7, e8, g1, g2, g8, h2, h4, h6, ♞c8, h1; черные: ♛f5, ♚a3, a5, a7, b1, b7, b8, d1, d2, d6, d7, e1, f8, h3, h5, h7, h8, ♞a8, f1.

24) Белые: ♖f7, ♗d4, ♝f8, g5, ♜e4, h6, ♞c3, h4, ♠d2, f2, h2, h3; черные: ♛f4, ♠e3, g3.

25) Белые: ♖f3, ♗d8, ♝b7, f6, ♜a8, d6, ♞a6, g8, ♠a5, c4,

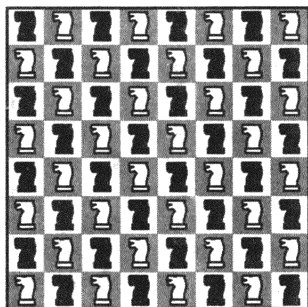


Рис.9. Каждый ход – взятие

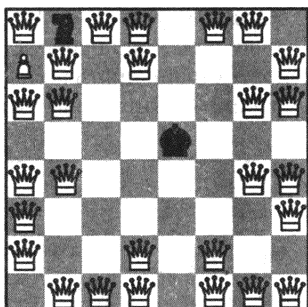


Рис.10. 143 мата черному королю

е4; черные: ♖с6, ♔е1, ♛с3, g2, ♙е3, h1, ♘b1, h3, ♜d5, f5, h4.

26) Белые: ♖е7, ♔f5, ♛с4, d1, ♙a2, e5, ♘d3, e8, a7, b5, d7, e2, h7; черные: ♜d5, ♛g8.

27) Белые: ♖с1, ♔b4, b6, d2, d8, f3, f8, g1, h4, h6, ♛a5, c7, ♙b5, b8, ♘b1, b2; черные: ♜е5, ♔a1, a2, ♜a3, b3, c2.

Предъявляя к расстановкам фигур иные требования, можно установить еще множество рекордов. Интересно, например, условие, при котором каждый ход одной стороны или обеих является взятием, шахом или матом. На рисунке 11 показана рекордная позиция – легальная, с превращенными фигурами, но без превращения пешек, – в которой у белых 50 вынужденных матов, т.е. матует любой их ход.

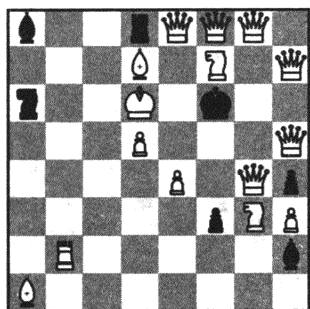


Рис.11. Рекордное число вынужденных матов

Иногда в задачах на конструирование требуется, чтобы на доске присутствовал полный комплект из 32 фигур. Но чаще достаточно участия восьми фигур одного цвета

(король, ферзь, две ладьи, два слона, два коня, пешек нет). Вот две родственные рекордные задачи.

Расставьте восемь фигур так, чтобы в их распоряжении было наибольшее число ходов.

Ответ круглый – 100 ходов (рис.12,а), всего на девять меньше, чем при пешках (см. рис.7,а). Хотя у белых здесь сотня ходов, четырнадцать полей не атакованы (включая семь занятых фигурами). Интересно, что в позиции на рисунке 9,а (глава 9)

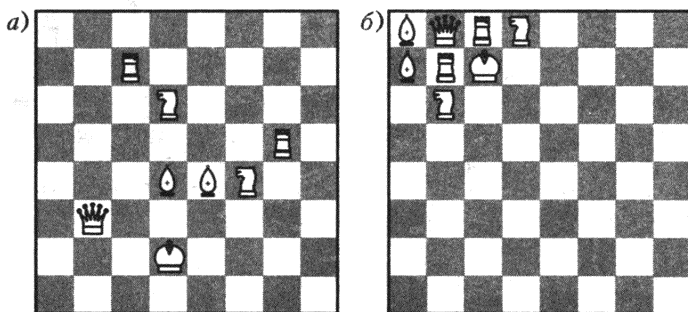


Рис.12. Наибольшее и наименьшее число ходов у восьми фигур

те же восемь фигур (но слоны одноцветные) держали под обстрелом всю доску, но сделать могли только 74 хода.

При восьми фигурах и восьми пешках, которым разрешено превращаться, рекорд увеличивается до 122 ходов (см. рис.7,б).

Расставьте восемь фигур так, чтобы в их распоряжении было наименьшее число ходов.

При самом неуклюжем расположении восемь белых фигур могут сделать всего 10 ходов: 7 – кони и 3 – король (рис.12,б). Данная расстановка (ферзя и белопольного слона можно поменять местами) рекордная еще в двух отношениях: под ударом наименьшее число полей (включая занятые фигурами) – 16, и в состоянии двигаться наименьшее число фигур – 3.

При полном шахматном комплекте (32 фигуры и пешки) можно добиться того, что у фигур будет всего два хода. В позиции на рисунке 13,а это ходы ♔c2-d1 и ♕c1-e2. А в позиции на рисунке 13,б из 32 фигур ходить может только одна – белый ферзь, в распоряжении которого семь ходов. Легальной

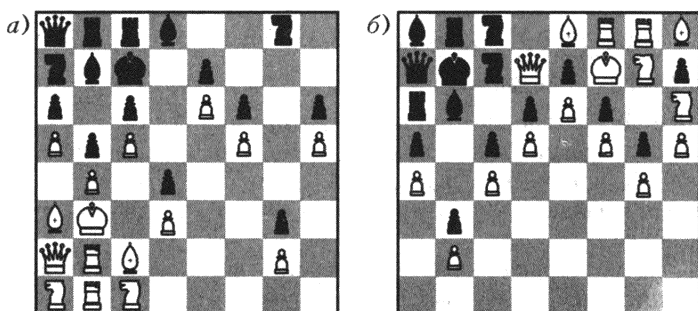


Рис.13 Как мало у черных ходов!

позиции с полным комплектом, в которой вообще нет ходов, придумать пока не удалось.

Сколько различных ходов существует на шахматной доске?

Ход характеризуется фигурой, которая его совершает, цветом фигуры, начальным и конечным полями, взятой фигурой (при взятии) и превращенной фигурой (при превращении). Надо учесть также рокировки. Точный анализ показывает, что всего на доске существуют 43 732 разных хода. Последнему вопросу можно придать шуточный характер.

Сколько ходов могут победно завершить партию?

Не надо ничего считать, таких ходов – 43 732. Ведь после любого из них партнер может... немедленно сдаться!

СИЛА ФИГУР

Сила шахматных фигур – величина относительная и зависит от конкретной обстановки на доске. Придуманно немало остроумных позиций, в которых одна пешка справляется с целой неприятельской армией. Но вместе с тем любой шахматист знает, что слабее всех фигур пешка, что легкие фигуры, конь и слон, примерно равноценны, и любую из них можно отдать за три пешки, ладья сильнее легкой фигуры, а ферзь намного превосходит ладью. Существуют различные шкалы оценок силы фигур, причем за единицу принята сила пешки. Вот некоторые из шкал, через $F(x)$ обозначается сила фигуры x :

$$F(\text{♙}) = 1, F(\text{♜}) = F(\text{♞}) = 3, F(\text{♝}) = 5, F(\text{♚}) = 9;$$

$$F(\text{♙}) = 1, F(\text{♜}) = 3, F(\text{♞}) = 3,5, F(\text{♝}) = 5,5, F(\text{♚}) = 10;$$

$$F(\text{♙}) = 1, F(\text{♜}) = F(\text{♞}) = 3,5, F(\text{♝}) = 5, F(\text{♚}) = 10.$$

Все шкалы вполне соответствуют представлению шахматистов о силе фигур. Так, в них отражено, что ладья равносильна легкой фигуре и двум пешкам, ферзя можно разменять на две ладьи или ладью, слона и пешку и т.д. О силе короля речь пойдет чуть ниже.

Конечно, игрок при расчете вариантов автоматически сравнивает силу фигур и никаких арифметических действий не производит. Что же касается компьютера, то он без той или иной шкалы просто не в состоянии играть.

Приведенные шкалы отражают реальный опыт игры. Однако существует и чисто математический подход к определению силы фигур, основанный на особенностях их передвижения. В принципе, фигура тем сильнее, чем большее число ходов в ее распоряжении, и значит, большее число полей она держит под ударом. Число ходов зависит от положения фигуры, но легко определить и среднее значение.

Складывая число возможных ходов фигуры x с каждого поля доски (рис.1), получаем общее число $S(x)$. Разделив его на число всех полей, находим среднее число ходов $P(x)$. Эту величину можно назвать подвижностью фигуры x . Для нахождения силы фигуры x , осталось разделить ее подвижность $P(x)$ на подвижность пешки $P(\text{♙})$.

Найдем силу всех фигур на обычной доске, а затем обобщим результаты для доски $n \times n$. Начнем с короля (рис.1,а). С угловых полей он может сделать три хода, с остальных крайних полей – по пять, а на внутренних полях доски в его распоряжении восемь ходов. Суммируя, получаем возможное число ходов короля на доске 8×8 (рокировки не учитываются):

$$S(\text{К}) = 3 \times 4 + 5 \times 24 + 8 \times 36 = 420.$$

Аналогично для ладьи, слона, ферзя, коня и пешки имеем (рис.1,б-е):

$$S(\text{Л}) = 14 \times 64 = 896;$$

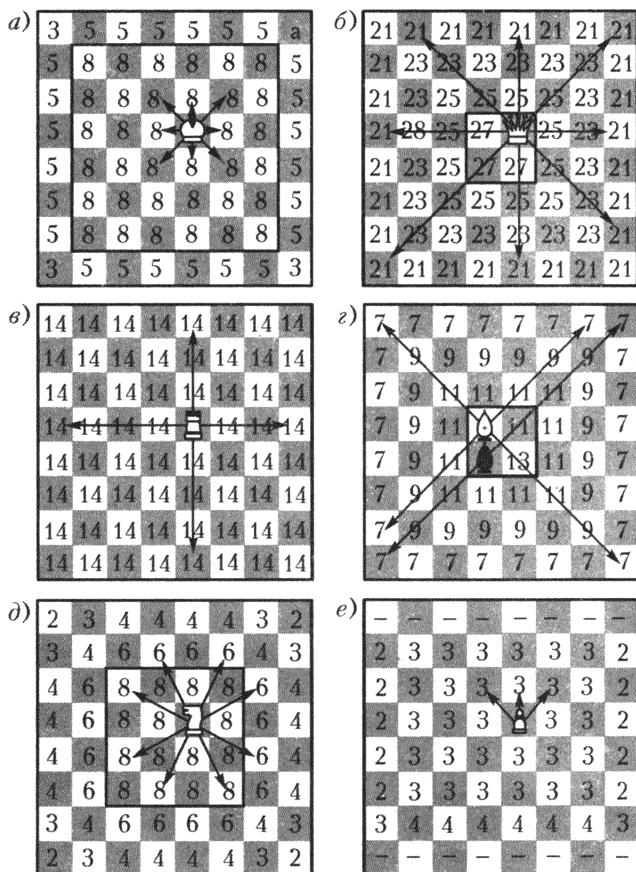


Рис.1. Сила шахматных фигур

$$S(\text{♟}) = 7 \times 28 + 9 \times 20 + 11 \times 12 + 13 \times 4 = 560 ;$$

$$S(\text{♞}) = 21 \times 28 + 23 \times 20 + 25 \times 12 + 27 \times 4 = 1456 ;$$

$$S(\text{♜}) = 2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 20 + 6 \times 16 + 8 \times 16 = 336 ;$$

$$S(\text{♚}) = 2 \times 10 + 3 \times 32 + 4 \times 6 = 140 .$$

Для пешки учтены поля, на которые она может пойти, и поля, которые она держит под ударом и перемещается при взятии (рис.1,е). То, что при достижении края доски пешка превращается в разные фигуры, во внимание не принимается.

На рисунках 1,а-д видно, что наибольшее число ходов ферзь и слон могут сделать с полей центрального квадрата 2×2 , конь – квадрата 4×4 , король – квадрата 7×7 , а для ладьи все поля равноценны.

Обозначим через $R(x)$ число полей, на которых может находиться фигура x . Очевидно, для всех фигур, кроме пешки, $R(x) = 64$, $R(\text{♚}) = 48$ (на крайних горизонталях она не может находиться).

Среднюю подвижность $R(x)$ фигуры x можно определить по формуле:

$$R(x) = S(x)/R(x) .$$

Вычислим ее для всех фигур:

$$P(\text{♟}) = 14 ;$$

$$P(\text{♞}) = 8,75 .$$

Ферзь ходит, как ладья и слон, и поэтому

$$P(\text{♞}) = P(\text{♟}) + P(\text{♞}) = 22,75 ;$$

$$P(\text{♜}) = 6,5625 ;$$

$$P(\text{♚}) = 5,25 ;$$

$$P(\text{♚}) \approx 2,9 .$$

Принимая, как и раньше, силу пешки за единицу, находим силу фигур x :

$$F(x) = P(x)/P(\text{♚}) .$$

В результате получаем следующую шкалу силы фигур (значения округлены до десятых долей):

$$F(\text{♚}) = 1, F(\text{♜}) = 1,8, F(\text{♞}) = 3, F(\text{♟}) = 4,8,$$

$$F(\text{♞}) = 7,8, F(\text{♜}) = 2,25.$$

Здесь у нас впервые появился король. Конечно, он ценнее всех остальных фигур, так как его потеря означает, что на доске мат и партия закончена. Поэтому при создании компьютерных программ в качестве силы короля выбирается некое большое число. Однако в смысле подвижности главную фигуру можно сравнивать с другими, и данная оценка вполне пригодна.

В построенной шкале имеются некоторые расхождения с практикой. В частности, ферзь, ладья и слон слишком превосходят коня. Однако в партии действия дальнобойных фигур, в отличие от коня, почти всегда ограничены другими фигурами, своими и чужими, и их подвижность уменьшается.

Данный математический подход позволяет проводить различные обобщения и придумывать интересные задачи. Найдем, прежде всего, подвижность $P_n(x)$ фигуры x на доске $n \times n$. Начнем снова с короля. С четырех угловых полей на доске любых размеров он имеет по 3 хода, с остальных $4(n-2)$ крайних полей – по 5 и с $(n-2)^2$ внутренних – по 8. Суммируя, имеем:

$$S_n(\text{♔}) = 4(n-1)(2n-1).$$

В распоряжении ладьи на любом поле доски $n \times n$ $2(n-1)$ ходов, и

$$S_n(\text{♖}) = 2n^2(n-1).$$

Для остальных фигур предлагаем вывести самостоятельно следующие формулы.

$$S_n(\text{♗}) = \frac{2}{3}n(n-1)(2n-1).$$

Ферзь сочетает в себе ходы ладьи и слона,

$$S_n(\text{♕}) = S_n(\text{♖}) + S_n(\text{♘}) = \frac{2}{3}n(n-1)(5n-1),$$

$$S_n(\text{♘}) = 8(n-1)(n-2),$$

$$S_n(\text{♙}) = (n-1)(3n-4) \quad (\text{для } n \geq 4).$$

Для всех фигур x , кроме пешки, $R_n(x) = n^2$, а $R_n(\text{♙}) = n(n-2)$.

Пользуясь формулами $P_n(x) = S_n(x)/R_n(x)$ и $F_n(x) = P_n(x)/P_n(\text{♙})$, нетрудно найти подвижность и силу всех фигур на доске $n \times n$.

Выясним теперь, как меняется подвижность фигур при неограниченном увеличении размеров доски $n \times n$ ($n \rightarrow \infty$), иначе говоря, на бесконечной шахматной доске. Подвижность

фигуры x на такой доске обозначим через $P_{\infty}(x)$, для ее нахождения достаточно вычислить соответствующий предел. Для фигур с ограниченным перемещением по доске – коня, короля и пешки – имеем:

$$P_{\infty}(\text{♟}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\text{♟}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = 8, \quad P_{\infty}(\text{♞}) = 8,$$

$$P_{\infty}(\text{♜}) = 3.$$

Движения ферзя, ладьи и слона ограничены только размерами доски, и поэтому их подвижность при $n \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает. Нетрудно получить следующие приближенные формулы:

$$P_n(\text{♚}) \approx 10n/3, \quad P_n(\text{♛}) = 2n, \quad P_n(\text{♝}) = 4n/3.$$

Из них вытекает, что подвижности и силы дальнобойных фигур, соответственно ферзя, ладьи и слона, при больших n находятся приблизительно в отношении 5:3:2. На больших досках эта пропорция вполне отвечает реальности, ведь здесь факт «далекого прицела» важнее возможных препятствий. Так что если вам когда-нибудь придется играть на бесконечной доске, учтите, что две ладьи на ней заметно сильнее ферзя...

Предлагаемый метод расчета дает возможность различных обобщений не только для необычных досок, но и для необычных фигур, о которых пойдет речь в трех следующих главах. Так, легко определить силу магараджи (М), объединяющего ферзя и коня: $F(\text{М}) = F(\text{♟}) + F(\text{♞})$, царицы (Ц) – ладья + конь: $F(\text{Ц}) = F(\text{♛}) + F(\text{♞})$ и т. д. Интерес представляют и обратные задачи, в которых требуется найти размер доски, на которой выполняется заданное соотношение сил нестандартных фигур. Возьмем, к примеру, кентавра (Ке), который ходит, как слон и конь. Легко проверить, что на стандартной доске 8×8 , согласно нашей шкале, кентавр равносильен ладье,

$$F(\text{Ке}) = F(\text{♝}) + F(\text{♞}) = F(\text{♛}).$$

На каких квадратных досках кентавр и ладья имеют одинаковую силу?

Очевидно, для ответа на этот вопрос надо решить следующее уравнение:

$$F_n(\text{♛}) = F_n(\text{♝}) + F_n(\text{♞}).$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение сводится к квадратному относительно n и имеет два корня: $n = 3$ и $n = 8$. Таким образом,

ладья и кентавр равносильны не только на обычной доске, но и на доске 3×3 .

Аналогично, решая уравнение $F_n(\text{♔}) = F_n(\text{♚})$, неожиданно приходим к выводу, что король и слон равносильны только на доске 6×6 (уравнение имеет один корень $n = 6$).

Полученные формулы позволяют решать и задачи, которые не связаны с силой фигур.

Сколькими способами можно расположить на доске $n \times n$ двух ферзей, чтобы они не угрожали друг другу?

Каждому положению двух ферзей на одной линии соответствуют два их хода (с одного из этих полей на другое). Отсюда следует, что число расстановок двух атакующих ферзей (обозначим его через t) равно половине всех возможных ходов ферзя, т.е. $t = S_n(\text{♚})/2$. Поскольку существует $C^2 n^2$ способов расположить двух ферзей на доске $n \times n$, для искомого числа A_n имеем:

$$A_n = C^2 n^2 - t = C^2 n^2 - S_n(\text{♚})/2 = \\ = n^2(n^2 - 1)/2 - n(n-1)(5n-1)/3 = n(n-1)(n-2)(3n-1)/6.$$

В частности, для $n = 8$ имеем 1288 подходящих расстановок двух ферзей.

Та же задача для трех ферзей дает очень громоздкие формулы, а для большего числа вообще не решена.

Подобным задачам (ферзей можно заменить другими фигурами) можно придать и вероятностный характер.

На два случайно выбранных поля доски $n \times n$ ставятся ферзи. Какова вероятность того, что они не будут угрожать друг другу?

Искомая вероятность p_n равна отношению A_n к общему числу расстановок двух ферзей на доске $n \times n$:

$$p_n = \frac{A_n}{C^2 n^2} = \frac{(n-2)(3n-1)}{3n(n+1)},$$

что для обычной доски дает $\approx 2/3$.

На три поля доски $n \times n$ случайным образом ставятся два разнопольных белых слона и черный король. При каких n вероятность того, что король окажется под шахом, равна 0,5?

Пусть n четно. Тогда число возможных расположений трех наших фигур равно

$$T_1 = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{n^2}{2} (n^2 - 2).$$

Каждому расположению слона и короля под шахом можно поставить в соответствие ход этого слона со своего поля на поле с королем. Таким образом, число способов поставить слона и короля (под шахом) равно $S_n(\text{♔})$. Если учесть, что при фиксированном положении двух этих фигур второго слона можно поставить на любое из $n^2/2$ полей другого цвета, то число расположений двух разноцветных слонов и неприятельского короля, стоящего под шахом, равно

$$T_2 = S_n(\text{♔})n^2/2 = n^3(n-1)(2n-1)/3.$$

Решая уравнение $T_2/T_1 = 0,5$, находим единственное решение $n = 4$. Аналогичное уравнение для нечетных n решений не имеет, и искомой является лишь доска 4×4 .

НА НЕОБЫЧНЫХ ДОСКАХ

Шахматная игра создавалась на протяжении многих веков, и ее правила неоднократно менялись, пока не приняли современный вид. Конечно, с математической точки зрения различия в ходах или форме доски не имеют принципиального значения. При любых правилах возникают те или иные математические нюансы, интересные задачи и головоломки.

Шахматы родились в Индии, там они назывались чатуранга. Эта была военная игра «четырех царей» – по двое с каждой стороны. В углах 64-клеточной доски располагались четыре армии, состоящие из фигур разного достоинства и пешек. Ходы королем, ладьями (колесницами), конями и пешками были те же, что и ныне, ферзей еще не придумали, а слоны ходили иначе – на третье поле по диагонали, перепрыгивая (как и конь) через другие фигуры. Понятие мата отсутствовало, а выигрыш достигался уничтожением всех сил противника. Главная особенность чатуранги состояла в том, что движение фигур определялось бросанием игральных костей.

Постепенно игра модифицировалась в двустороннюю: шатрандж у арабов и шатранг у персов. Хотя кости уже не бросались, но это еще не были современные шахматы: ферзь передвигался только на одно поле по диагонали, отсутствовала рокировка, игру начинали с определенных позиций (табий). И только в XV–XVI вв. н. э. возникли правила, почти не отличающиеся от нынешних (лишь пешка могла стартовать иначе). Окончательно шахматы сформировались в первой половине XVIII в.

Известно множество одних только национальных разновидностей шахмат. До сих пор играют в японские шахматы (шogi), китайские (цюнь ки), корейские (тъян-кеуи), армянские (тама), монгольские (шатар). Популярны и русские шахматы (тавре-ли), которые отличаются названием фигур (король – волхв, ферзь – князь, ладья – ратоборец, слон – лучник, конь – всадник, пешка – ратник) и, главное, действующие лица в них никогда не покидают доску, а попадают в плен к противнику и впоследствии могут быть освобождены. Фигуры изображаются на плоских шашках, которые встают друг на друга, образуя башни.

В заключительных главах книги речь пойдет о необычных играх, которые содержат те или иные математические элементы, носят занимательный характер. В шахматной композиции такие игры относятся к жанру сказочных или фантастических шахмат. Здесь существуют разные направления, придумано огромное множество оригинальных задач, пользующихся популярностью и среди шахматистов, и среди любителей головоломок.

Нетрадиционные игры могут отличаться от классических шахмат, во-первых, необычной доской, во-вторых, необычными правилами и, в-третьих, необычными фигурами. Разумеется, встречаются две «необычности» или даже все три одновременно. Займемся сначала играми, которые получаются при изменении формы доски.

Мини- и максишахматы. Самый простой способ получить новую игру – уменьшить или увеличить размеры доски.

Квадратная доска 5×5 является наименьшей, на которой умещается весь комплект шахматных фигур, правда, в сокращенном составе. Начальная расстановка по-

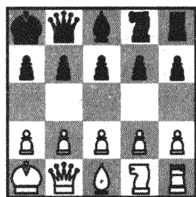


Рис.1. Минишахматы

казана на рисунке 1. Ходы обычные, лишь пешкам запрещено переступать на два поля вперед. В чью пользу игра на такой маленькой доске, тоже неизвестно, но если привлечь компьютер, то он наверняка быстро разберется в этом.

При увеличении размеров доски никаких ограничений не существует. В книге встречались различные игры на квадратных досках $n \times n$, прямоугольных $m \times n$ и даже на бесконечной доске. Правда, желающих сыграть на таких досках немного, в основном они используются для оригинальных математических задач и головоломок.

Максишахматы на доске 16×12 в начале XX века предложил чемпион мира Х.Р.Капабланка с целью преодолеть казавшуюся ему неотвратимой «ничейную смерть» шахмат. Игра ведется удвоенным комплектом фигур, причем начальный ход пешки возможен сразу на четыре поля вперед (со второй горизонтали на шестую для белых и с одиннадцатой на седьмую для черных). Для победы достаточно заматовать любого из двух королей противника. Матч в максишахматы между Капабланкой и гроссмейстером Мароци, состоявшийся в 1929 году, закончился победой автора игры со счетом 3:1. Партии продолжались свыше ста ходов и тянулись много часов. Как

показала жизнь, опасности ничейной смерти не существует, и изобретение Капабланки распространения не получило.

Среди старинных досок большого размера упомянем 12×12 для игры в «великие шахматы», колыбелью которых была Индия. Каждый игрок имел по 12 фигур и 12 пешек, а фигуры были весьма экзотические: крокодилы, жирафы, львы, единороги.

Восточный завоеватель Тамерлан, страстный любитель шахмат, считал недостаточными обыкновенные размеры доски. И для шахмат его личной системы, которые именовались образцовыми, была изготовлена специальная доска 11×10 . Одиннадцать видов фигур (генералы, верблюды, рыцари и др.) располагались в три ряда.

Плоские доски больших размеров нередко встречались в книге, вот еще один занятный пример: задача на доске 12×12 (рис.2).

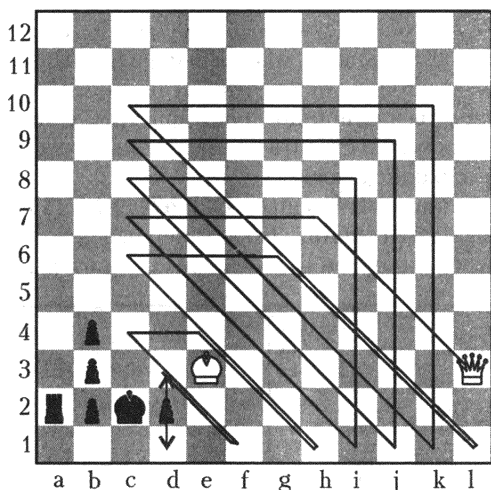


Рис.2. Мат в 21 ход

Сложный зигзагообразный маршрут ферзя изображен прямо на диаграмме: 1. ♛ h7+ ♚ c1 2. ♛ c7+ ♚ d1 3. ♛ i1+ ♚ c2 4. ♛ i8+ ♚ c1 5. ♛ c8+ ♚ d1 6. ♛ j1+ ♚ c2 10. ♛ k10+ ♚ c1 11. ♛ c10+ ♚ d1 12. ♛ l1+ ♚ c2 13. ♛ g6+ ♚ c1 14. ♛ c6+ ♚ d1 15. ♛ h1+ ♚ c2 16. ♛ e4+ ♚ c1 17. ♛ c4+ ♚ d1 18. ♛ f1+ ♚ c2 19. ♛ d3+ ♚ c1 20. ♛ :d2+ ♚ b1 21. ♛ d1×

Шахматы на параллельных досках. Игра ведется одновременно на двух досках, расположенных одна над другой – на

рисунке 3 доска (2) над доской (1). На каждой из них ходы обычные, но фигуры могут перемещаться и в пространстве – переходить с одной доски на другую. На рисунке показано, на какие поля верхней доски (2) попадают фигуры нижней (1).

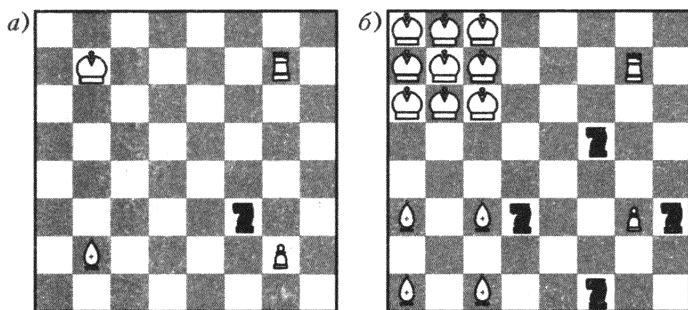


Рис.3. Параллельные доски

Аналогично с верхней доски можно попасть на нижнюю. Ферзь в пространстве ходит как король, пешке разрешается перейти на другую плоскость только при взятии. Для игры в такие шахматы можно ограничиться одной доской, а фигуры, отправляющиеся на верхнюю плоскость, ставить на прозрачные подставки, расположенные на исходной доске.

В задаче на рисунке 4 решает 1. ♖h7(1)-h8 (1). Единственный способ выждать события. Король черных неподвижен, и они могут ходить только конем или пешкой. Если отступает конь (на

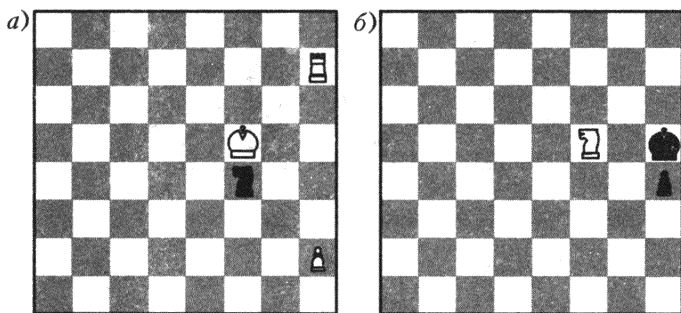


Рис.4. Мат в 2 хода

любую плоскость), то снимается удар с поля h5 и матует 2. ♖h8(1)-h5(1)×! – ладью поддерживает белый конь. На 1...h4(2)-h3(2) следует 2. h2(1)-h4(1)×!, что не годилось сразу из-за взятия на проходе: 1...h4(2):h3(1).

Вот основной вариант решения задачи на рисунке 5: 1. ♖e5(2)-c5(1)! с угрозой 2. ♖c5(1)-b3(1)×. 1...b6(1):c5(1) 2. ♜c1(2)-c2(1) ♞a7(1)-a7(2). Черная ладья выходит из засады, но тут на другую плоскость перескакивает и белая ладья. 3.

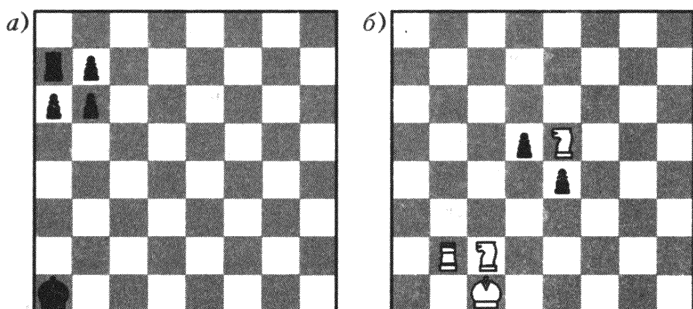


Рис.5. Мат в 4 хода

♞b2(2)-b2(1)! ♞a7(2)-a2(2) 4. ♞b2(1)-b1(1)× или 3...♜a1(1)-a2(2) 4. ♞b2(1)-a2(1)×.

Убедимся, например, что в заключительном положении во втором варианте на доске действительно мат. Черного короля на a2(2) атакует с нижней плоскости ладья a2(1). Сама она находится под присмотром коня c2(2); поля b1, b2, b3 (обеих плоскостей) контролирует белый король, поля a1, a3 нижней плоскости держит ладья, а верхней – конь.

Проективные шахматы. В такие шахматы играют на проективной доске. Правила основаны на свойствах прямых, известных из проективной геометрии. Воспользуемся одним из них, согласно которому все параллельные прямые пересекаются в так называемой бесконечно удаленной точке. Соответственно, доска для проективных шахмат получается из бесконечной доски (простирающейся по всей плоскости) добавлением четырех бесконечно удаленных полей: P_r – пересечение всех горизонталей, P_v – пересечение всех вертикалей, P_{d1} – пересечение всех диагоналей, параллельных a1-h8, P_{d2} – пересечение всех диагоналей, параллельных a8-h1.

На проективной доске сохраняются многие правила обычных шахмат, а основное изменение состоит в том, что дальнобойная фигура может переместиться на бесконечно удаленное поле по любому из двух возможных направлений (с учетом ее способа передвижения) и оттуда вернуться обратно на «конечное», не забывая своего цвета. На бесконечно удаленных полях не могут находиться одновременно две фигуры. В проективных шахматах

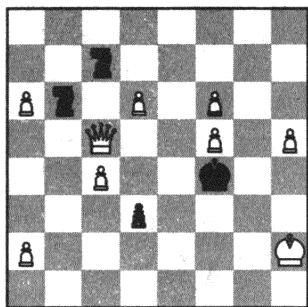


Рис.6. Мат в 2 хода на проективной доске

для фигур (они располагаются внутри обычной доски 8×8) открываются новые, неожиданные возможности.

В задаче Н. Петровича на рисунке 6 первый ход: **1. ♔ h2-g1!** Теперь у черного короля несколько ответов. Если он идет на e4, то мат дает белый ферзь, удаляясь в бесконечность через поле a5: **1... ♕ f4-e4** **2. ♖ c5-P_г ×**. Действительно, с поля P_г ферзь нападает на черного короля и держит все поля вокруг него: e3, f3 – через h3; d4, e4, f4 – через h4; d5, e5, f5 – через a5. Ход **2. ♖ c5-P_г** матует и при **1... ♕ f4-f3**. Поля e4, f4, g4 в этом случае ферзь держит через h4; e3, f3, g3 – через h3; e2, f2, g2 – через h2 (белый король предусмотрительно покинул это поле).

При отступлении черного короля на линию «g», а также ходе **1...d3-d2** матует **2. ♖ c5-P_{д1} ×** (ферзь уходит в бесконечность по диагонали c5-a3). Например, при **1... ♕ f4-g5** ферзь держит поля f4, g5, h6 через c1; f6 – через a1; f5 – через h7; g4, h5 – через d1, наконец, поле h4 – через e1.

Осталось рассмотреть ходы черных коней. На любой прыжок коня b6 следует **2. ♖ c5-P_{д2} ×**, а на прыжок коня c7 – **2. ♖ c5-P_в ×** (в первом случае ферзь уходит в бесконечность через a7, во втором – через c8).

Для всякой задачи важно не только наличие решения, но и его единственность. Нетрудно убедиться, что при других вступлениях белым уже не удастся поставить мат на втором ходу. Так, после **1. ♖ c5-P_г +** черный король скрывается на g5, а после **1. ♖ c5-P_{д1} +** на e4. С поля P_{д2} ферзь даже не объявляет шаха, а хода **♖ c5-P_в** и вовсе нет (вертикаль «с» загорожена с обеих сторон). Любопытно, что в задаче использовались все четыре бесконечно удаленных поля проективной доски.

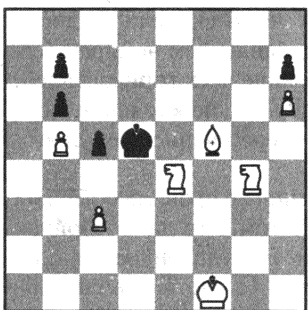


Рис.7 Мат в 3 хода на проективной доске

В задаче на рисунке 7 решает **1. ♕ f5-c8-P_{д2}!** У черных два ответа: пойти на c4 пешкой или королем.

1...c5-c4 2. ♖ f1-g2! ♜ d5:e4. До этого конь через h1 был защищен слоном с P_{d2}. 3. ♜ f3-g3×. Вскрытый мат объявил слон из бесконечности.

1... ♜ d5-c4 2. ♜ g4-e3+ ♜ c4-d3. Поля b3 и b5 контролирует слон с P_{d2}. 3. ♜ f1-f2×. И снова слон заматовал с бесконечно удаленного поля.

Объемные шахматы. На досках, рассмотренных до сих пор, поля определялись двумя координатами, т.е. мы обходились традиционной нотацией (лишь в игре на параллельных досках обозначения были чуть сложнее). Иначе обстоит дело в объемных (пространственных) шахматах. В них играют на трехмерной доске, представляющей собой куб $n \times n \times n$ или, в общем случае, параллелепипед $m \times n \times k$. А единичные кубики образуют «поля» доски, которые определяются уже тремя координатами. Возьмем, к примеру, объемную доску $4 \times 4 \times 4$, содержащую, как и обычная, 64 поля (кубика). Если горизонтальные слои доски занумеровать числами 1, 2, 3, 4, то ее левый ближний столбец содержит поля a11, a12, a13, a14, и т.д. Перемещению вдоль каждого слоя куба соответствует ход на обычной доске, но фигуры могут перескакивать и с одного слоя на другой. Так, ферзь с поля a11 в состоянии перейти на другие слои, например, на поле a14 верхнего или пойти по большой диагонали куба – ♔ a11-h44. Конь, как всегда, ходит буквой «Г»: на одно поле вдоль одного слоя и на два в перпендикулярном.

Задачу Эйлера о ходе коня можно сформулировать и на объемной доске – как по ее внутренним полям, так и по поверхности.

Обойдите конем все поля объемной доски $4 \times 4 \times 4$, посетив каждое из них по одному разу.

Очевидно, нахождение искомого маршрута равносильно нумерации всех полей-кубиков числами от 1 до 64, при которой каждые два поля с соседними номерами связаны ходом коня. На рисунке 8 изображены проекции четырех горизонтальных слоев объемной доски на плоскую 4×4 (номера слоев 1, 2, 3, 4). Нетрудно убедиться, что, отправляясь от поля b33 (с номером 1)

57	30	47	36	42	37	56	51	27	62	15	2	10	7	22	17
48	33	58	31	55	52	43	40	14	♘1	26	63	21	18	9	6
29	60	35	46	38	41	50	53	61	28	3	16	8	11	20	23
34	45	32	59	49	54	39	44	4	13	64	25	19	24	5	12

Рис 8 Обход конем объемной доски $4 \times 4 \times 4$

и двигаясь в указанном порядке, конь обойдет все поля объемной доски.

Обойдите конем поверхность объемной доски $8 \times 8 \times 8$, посетив каждое из них по одному разу (в данном случае все поля плоские).

Здесь конь перемещается по шести двумерным доскам 8×8 , образующим грани куба. Проблема состоит в «сопряжении» всех

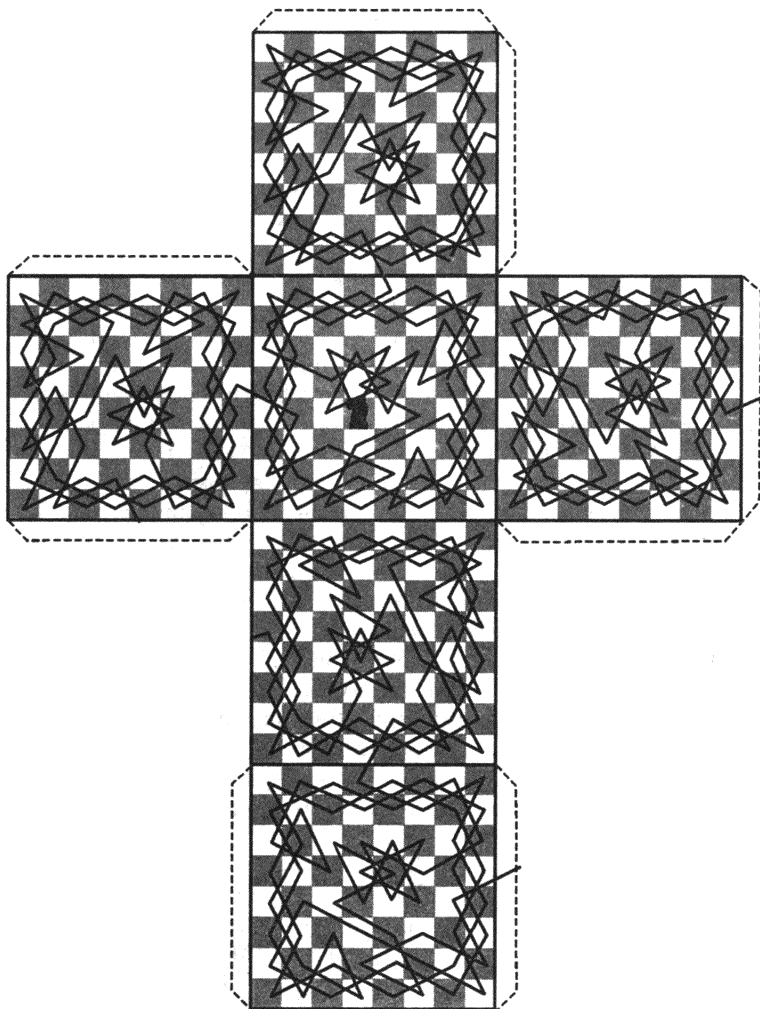


Рис.9. Обход конем поверхности доски $8 \times 8 \times 8$

шести обходов. Воспользуемся разверткой куба (рис.9), где решение показано графически. Маршрут по поверхности куба является замкнутым, конь может начать и закончить путешествие на любом из $64 \times 6 = 384$ полей.

Многие задачи о расстановке фигур на плоских досках $n \times n$ становятся более сложными при переходе к объемным.

Какое наименьшее число ладей можно расставить на объемной доске $n \times n \times n$ так, чтобы они держали под угрозой все свободные поля?

Фактически здесь требуется найти число ладей-часовых, доминирующих на объемной доске. Можно доказать, что оно равно $n^2/2$ при четных n и $(n^2 + 1)/2$ при нечетных. В частности, для охраны доски $8 \times 8 \times 8$ достаточно 32 ладей.

Какое наибольшее число ладей можно расставить на объемной доске $8 \times 8 \times 8$ так, чтобы они не били друг друга?

Очевидно, в каждом столбике из восьми кубиков-полей может стоять только одна ладья, поэтому больше 64 поставить нельзя. Покажем, как поставить 64 ладьи, не угрожающие друг другу. Введем систему координат с осями, направленными вдоль ребер куба, чтобы каждое поле имело координаты (x, y, z) , где x, y и z — одно из чисел от 0 до 7, и расположим ладьи на полях, сумма координат которых делится на 8. Докажем, что данная расстановка является искомой.

Убедимся, что в каждом вертикальном столбике находится по ладье, т.е. всего их 64. Каждый такой столбик определяется парой координат x, y . Координата z для ладьи однозначно задается условием $x + y + z = 0 \pmod{8}$. А именно, если $x + y$ делится на 8, то $z = 0$, в противном случае $z = 8 - \text{остаток от деления на 8 суммы } x + y$.

Осталось показать, что ладьи не бьют друг друга. Предположим противное — пусть какие-то две ладьи находятся на одной «линии». Значит, две их координаты, например, x и y , совпадают, а третьи отличаются, скажем, z_1 и z_2 . Поскольку суммы $x + y + z_1$ и $x + y + z_2$ делятся на 8, на 8 делится и их разность $z_1 - z_2$. Однако это невозможно, так как z_1 и z_2 — различные неотрицательные числа, меньшие 8.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ШАХМАТЫ

Большинство рассмотренных в книге досок – плоские. Однако с помощью тех или иных геометрических преобразований из обычной доски нетрудно соорудить другие, самой причудливой формы. Особой популярностью у композиторов-фантастов пользуются цилиндрические доски, вертикальная и горизонтальная (рис.1, а, б). Первая получается при склеивании вертикальных краев стандартной доски (рис.1, в), вторая – горизонтальных.

Цилиндрические шахматы обладают необыч-



Рис.1. Цилиндрические доски

ными свойствами, например, король и ладья в них не всегда матают одинокого короля противника. С другой стороны, открываются новые возможности.

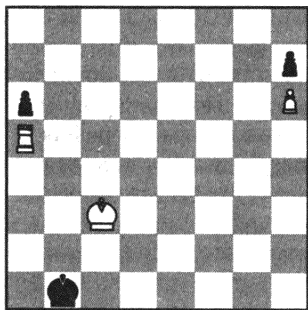


Рис.2. Мат в 2 хода на обычной доске и на вертикальной цилиндрической

В задаче А.Кузнецова и Н.Плаксина (рис.2) на плоской доске все просто – 1. ♖:а6 ♔с1 2. ♖а1×. А на цилиндрической после 1. ♖а5:а6 теряется ладья – 1...h7:а6! (вертикали «а» и «h» склеены!). Если же она уйдет с а5, то черные продвинут вперед пешку, и мата нет. Решает парадоксальное 1. ♖а5-а5!! – ладья совершает «круг почета» по пятой горизонтали и возвращается на исходное место! Теперь на 1... ♔с1 следует 2. ♖а1×.

На рисунке 3 уже три задания. На плоской доске следует **1. ♚ e2-e8×**. На вертикальном цилиндре этот ход не матует из-за ответа **1... ♛ a8-h7!**, а к цели ведет только **1. ♚ e2-g8×**! (белый ферзь прошел по маршруту e2-a6-h7-g8); на горизонтальном цилиндре появление ферзя на e8 тоже не опасно для черных ввиду **1... ♛ a8-a1(b1)**, а матует **1. ♚ e2-a2×**!

В этой задаче у черного короля не было никакой свободы, и ферзю лишь оставалось нанести смертельный укол. Поиск более тонкого исходного построения приводит к еще одной занятой позиции (рис.4) с теми же заданиями.

По сравнению с предыдущей позицией, король черных чувствует себя вольготнее, а пешку b7 заменил более динамичный конь. Тем не менее на каждой из трех досок мат ставится мгновенно. На обычной – **1. ♚ a6×**. Два других маневра ферзем нам уже знакомы: **1. ♚ g8×** на вертикальном цилиндре и **1. ♚ a2×** на горизонтальном. Особенность матов состоит в том, что они двойные: ферзь нападает на короля с двух сторон, и перекрытия – в первом случае **1... ♛ d8(h8)**, а во втором **1... ♛ a5(a1)** – не спасают.

Несколько меняя расположение белых, можно получить различные задачи-близнецы. Так, при перестановке короля на e4, а ферзя на f1 два финала те же, а на горизонтальном цилиндре ферзь объявляет мат из центра доски – **1. ♚ d3×**! На короля он нападает по диагонали d3-b1-a8, а поле a7 на сей раз контролирует слон по диагонали f4-c1-b8-a7 (король смещен с e3, чтобы не загромождать дорогу слону).

Дальнейшие «цилиндрические размышления» показывают, что черный конь вообще лишний. Позиция на рисунке 5 представляет собой идеальное воплощение темы трех задач на разных досках. Действительно, присутствуют всего четыре фигуры,

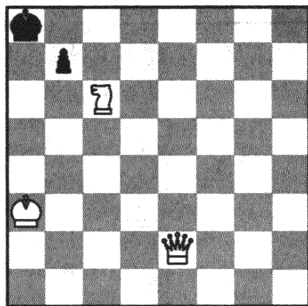


Рис.3. Мат в 1 ход на трех досках: обычной, вертикальной цилиндрической и горизонтальной цилиндрической

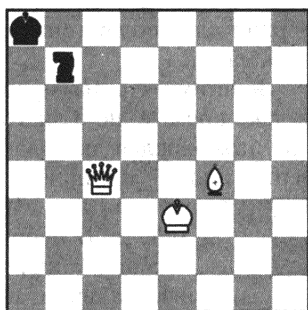


Рис.4. Мат в 1 ход на трех досках

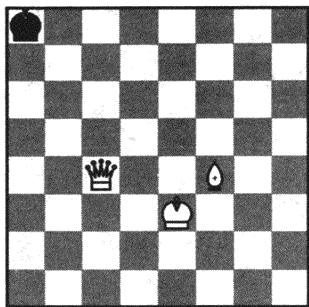


Рис.5. Мат в 1 ход

построение легкое, изящное: белые фигуры удалены от черного короля, и, кажется, о мате в 1 ход не может быть и речи. Чтобы глубже проникнуть в суть цилиндрических шахмат, внимательно изучим все три решения.

На обычной доске по-прежнему к цели ведет **1. ♔ a6×**. На **1. ♔ a2** (с8, е4) следует возражение **1... ♕ b7** (a7, a7)!

На вертикальном цилиндре линии «a» и «h» склеены, и **1. ♔ a6(е4)+** опровергается путем **1... ♕ h8!** На **1. ♔ c8** (g8, h7)+ есть ответ **1... ♕ h7** (b7, h7). Матует неожиданный маневр **1. ♔ c4-a2-h1×**! Ферзь взял под контроль сразу четыре поля в районе черного короля (включая занятое им) – a8, b7 по диагонали h1-a8 и h7, h8 по вертикали «h». Любопытно, что с более близкого расстояния отнять у короля столько полей, не становясь ферзем под бой, невозможно ни на какой доске. Еще два поля для отступления короля – a7 и b8 – держит слон по диагонали c1-h6-a7-b8. Итак, на доске натуральный мат!

Заметим, что на цилиндрических досках все линии – не только прямые, но и диагональные – содержат по восемь полей, при этом каждая диагональ сворачивается в виток спирали. На вертикальном цилиндре на концах одного из таких витков оказываются поля a8 и h1, на концах другого – b8 и a1, третьего – c8 и b1 и т. д. В перпендикулярном направлении получаем витки-диагонали с концами a8 и b1, b8 и c1, c8 и d1 и т. д.

На горизонтальном цилиндре склеены первая и восьмая горизонтали, и на **1. ♔ a6+** у короля есть ответ **1... ♕ a8-b1!** Матует **1. ♔ c4-f1-g8-h7×**! Вновь ферзь отнял у короля четыре поля: – a8, b1 по диагонали h7-b1-a8 и a7, b7 по седьмой линии (на самом деле теперь у нее нет номера!). Поля b8, a1 держит слон по диагонали h2-b8-a1. И здесь другие шахи ферзем не матают – король уходит на a7, b1 или b7. Если белого короля увести с дороги слона, то шахи **1. ♔ c8** (e4, h1)+ становятся матами, поскольку поле a7 оказывается недоступным для черного короля. В отличие от вертикального цилиндра, здесь витки, образуемые диагоналями, иные: на концах одного – поля a1 и h8, на концах другого – a2 и h1, третьего – a3 и h2 и т. д.

Странно, но белый король в этой задаче, будучи в тылу у своих фигур, своеобразно участвует в решении: мешает белым

матовать! В этом тоже специфика цилиндра: то, что белый король бесполезен, было ясно сразу, но то, что он вреден, открылось неожиданно...

Примечательно, что задачи на рисунках 4, 5 можно объединить в одну: во второй из них надо добавить еще три задания — те же, но с черным конем на b7! При этом решения задач-близнецов, как мы видели, заметно отличаются.

Вот еще одна задача с весьма необычным... числом ходов (рис. 6). Пока что перед нами обычная доска.

В этой задаче-шутке В.Хуторного черный король и вправду получает мат в 0 ходов, причем сразу двумя способами. Белые, как и требуется в задании, не прикасаются к своим фигурам, но... сворачивают доску в цилиндр. И на любой из

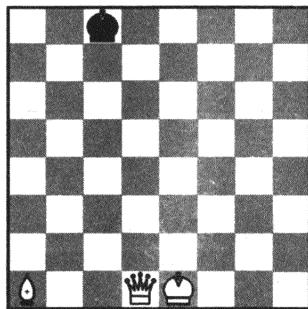


Рис. 6. Мат в 0 ходов

двух досок король оказывается заматованным. Пусть, например, склеены друг с другом крайние горизонтали. Тогда поле a1 присоединяется слева к диагонали b8-h2, и поля b8, c7 попадают под наблюдение слона. Кроме того, в одну сливаются диагонали a6-c8 и d1-h5 (a6 и h5 крайние поля новой диагонали), и в результате ферзь нападает на черного короля, одновременно отнимая у него поле b7. Поля же d7, d8 недоступны королю на любой доске. Мат!

На вертикальном цилиндре поле a1 вновь присоединяется к диагонали b8-h2, но снизу, а сливаются диагонали d1-h5 и a6-c8 (края новой диагонали — d1 и c8). Черный король в матовой сети!

Вот еще одна веселая позиция (рис.7). Шансы на ничью у белых, прямо скажем, невелики. Черная пешка беспрепятственно идет вперед, пока не станет ферзем. Но станет ли?

В отчаянии белые придумывают спасительный трюк. Они склеивают крайние горизонтали доски и превращают ее в горизонтальный цилиндр! В результате пешка неожиданно лишается всяческих перспектив. Перпетуум-мобиле...

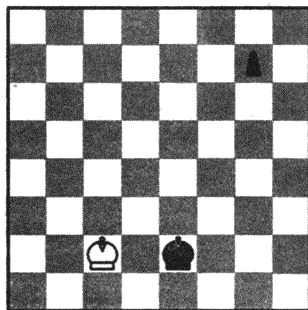


Рис.7. Ничья

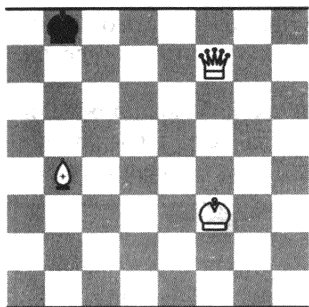


Рис.8. Мат в 3 хода на вертикальном цилиндре

Цилиндрическую доску часто изображают с отрезанными границами (рис.8).

Перед нами квартет фигур со знакомым соотношением сил: 1. ♔ f2 ♕ c8 2. h2 ♔ d8 3. ♖ d1×, 1... ♕ a8 2. d2 ♕ h8 3. ♖ h1×.

При переходе к новым доскам возникают не только оригинальные шахматные сюжеты, но и интересные математические головоломки. Многие из тех, что рассматривались нами на стандартной доске, можно перенести на цилиндр.

Можно ли расставить на цилиндрической доске восемь ферзей не угрожающих друг другу?

Если на обычной доске, как мы знаем, имеются 92 расстановки, то на цилиндрической нет ни одной! Докажем это для вертикального цилиндра. Возьмем доску 8×8, помня, что ее края склеены. Это означает,

в частности, что поля с d1 до a4 и с h5 до e8 образуют одну диагональ. Запишем на каждом поле доски три цифры, совпадающие соответственно с номером вертикали, горизонтали и диагонали (параллельной a8-h1), проходящих через это поле (рис. 9).

187	286	385	484	583	682	781	888
178	277	376	475	574	673	772	871
161	268	367	466	565	664	763	862
152	251	356	457	558	655	764	853
143	242	341	448	547	646	745	844
134	233	332	431	538	637	736	835
125	224	323	422	521	628	727	826
118	215	314	413	512	611	718	817

Рис.9. Восемь мирных ферзей на цилиндре не умежаются

Предположим, что восемь ферзей расставлены на восьми полях так, что не угрожают друг другу. Тогда на восьми полях, занимаемых ими, все первые цифры различны и образуют полный набор 1,

2, ...8. То же самое касается вторых и третьих цифр. Таким образом, сумма всех 24 цифр на полях с ферзями равна $(1+2+\dots+8)\times 3 = 108$. Так как сумма цифр каждого поля делится на 8, то и общая сумма должна делиться на 8, однако 108 на 8 не делится – противоречие!

Если произвести двойное склеивание краев обычной доски (см. стрелки на рисунке 1), то получим тороидальную доску

(рис.10). На ней одинокого короля не в состоянии заматовать даже ферзь с королем, просго нет ни одной матовой позиции.

На рисунке 11 после **1. ♖ f5-h7!**

в распоряжении черных два ответа:

а) **1... ♜ e8-f8** (поля d1, e1 и f1 контролирует белый король с e2 – на торе действуют правила горизонтального цилиндра!) **2. ♖ h7-g6 ♜ f8-e7** **3. ♜ e2-e1 ♜ e7-d7**

(поля d8 и f8 держит белый король с e1) **4. ♖ g6-e8×**; б) **1... ♜ e8-d8** **2. ♖ h7-c7+ ♜ d8-e8** **3. ♘ b5-h6!** (конь идет по тору, как по вертикальному цилиндру!) **3... ♜ e8-f8** **4. ♖ c7-e1×** (поля f7 и g8 около короля держит белый конь, а остальные – ферзь).

А в следующей позиции (рис. 12) мат требуется поставить на обычной доске, цилиндрической и тороидальной.

На обычной доске после **1. a4** нет защиты от **2. ♜ b5×**. Но на вертикальном цилиндре этот ход ничего не дает, ввиду **1...ha!** – черная пешка h4 бьет белую на проходе. А решает **1. ♜ d7!**, и черным не избежать **2. ♜ h5×**.

На торе марш короля на d7 опровергается при помощи **1...h1 ♖ (♜)**, и в случае **2. ♜ h5+** эта ладья просто берется превращенной фигурой сверху, через поля h8-h6. Что же делать? К цели ведет удивительный ход **1. ♜ g2!!** с неизбежным **2. ♜ g5×**! Убедимся в этом.

Ладья покинула поле b2, но коня b6 защищает другая ладья – h6. Она держит шестую горизонталь, и поэтому черному королю не скрыться на ней (и после **1... ♜ b5** тоже). А четвертая горизонталь недоступна ему из-за белых коней. На поле g5 белая ладья g1 попадает на втором ходу по вертикали «g» сверху (через поля g8-

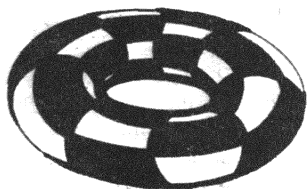


Рис 10 Шахматный тор

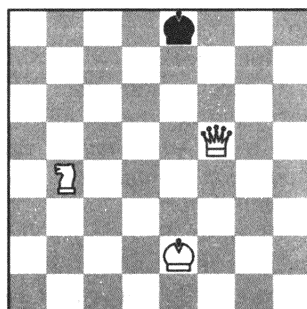


Рис.11 Мат в 4 хода на тороидальной доске

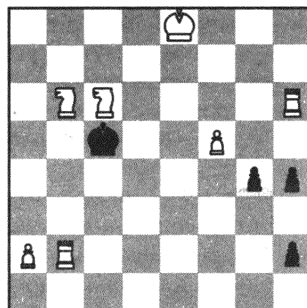


Рис 12 Мат в 2 хода на трех досках

g6), и воспрепятствовать ее появлению здесь черные не в состоянии.

Королю, стоящему на c5 (или b5), ладья будет угрожать слева по пятой горизонтали (через поля a5-b5). Получается забавная картина: если воспринимать доску как обычную, забыв на секунду, что это тора, то ладья g2 как бы перескакивает обе пешки – черную g4 и белую f5.

Строго говоря, превращений на горизонтальном цилиндре и на торе не бывает, и наши рассуждения не совсем корректны. Однако если вспомнить, что при достижении восьмой (первой) горизонтали пешка по кодексу превращается в фигуру, то противоречий нет. Ведь нумерация линий при переходе к цилиндру сохраняется (по той же причине можно говорить и о взятии на проходе).

Классические задачи и головоломки о расстановках фигур нетрудно перенести на тороидальную доску.

Какое наибольшее число королей можно расставить на торе, образованном из доски $n \times n$, так, чтобы они не угрожали друг другу?

В отличие от плоской доски, на тороидальной король с любого поля может сделать восемь ходов, что показано на рисунке 13 для трех положений (точками для короля a1,

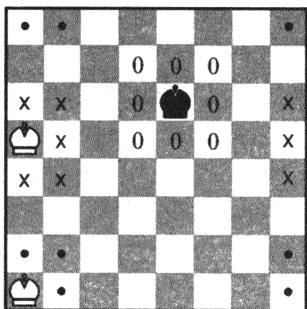


Рис.13. Короли на торе

крестиками – a5, кружочками – e6). Конечно, это обстоятельство отражается на решении.

При четных n на торе, как и на плоской доске, можно расставить $n^2/4$ королей, находящихся в безопасности – расстановка 16 королей на рисунке (выделенный квадрат) подходит и для тора – при склеивании краев обычной доски все короли по-прежнему стоят в отдалении друг от друга. А вот при нечетных n число королей уменьшается. Легко

доказать, что оно составляет не $(n+1)^2/4$, как на плоской доске, а $(n^2 - n)/4$. Конечно, имеется в виду, что $n > 1$ (на доске 1×1 ее единственное поле не с чем склеивать!).

Так, расстановка 25 королей на плоской доске 9×9 (рис.14) не годится для тора: многие короли, стоящие в безопасности на краю доски, при ее двойном склеивании становятся соседями и бьют друг друга: a1 и i1; a1 и a9; a1 и i9; a3 и i3; a5 и i5; c1 и c9 и т.д. Из приведенной формулы следует, что при $n = 9$ на

торе умещается 18 мирных королей. На рисунке 14 доска пока обычная, а при склеивании никакие два короля не становятся соседями.

Помимо цилиндра и тора, можно играть на конусоидальной доске (вертикаль «а» приклеена к восьмой горизонтали), на листе Мебиуса (стандартная доска перекручивается на пол оборота, и ее края склеиваются), на шарообразной и т.д. Список можно продолжить.

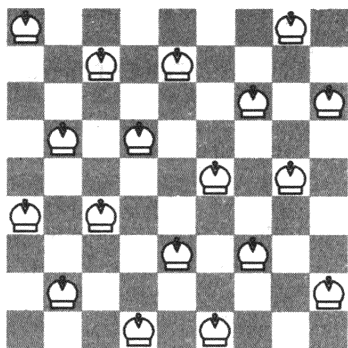


Рис 14. На торе 18 мирных королей

ГЕКСАГОНАЛЬНЫЕ ШАХМАТЫ

Нестандартные доски с теми или иными математическими свойствами редко используются для серьезной игры, это, как уже говорилось, скорее инструмент для композиторов-фантастов. Но есть и одно исключение – гексагональные, или, иначе, шестигранные, шахматы. Доска в них, как и ее поля, имеет вид шестиугольника, благодаря чему фигуры получают намного больше простора. Изобретены два варианта игры: один – российским геологом И. Шафраном, другой – польским инженером В. Глинским. Остановимся сначала на польских шахматах, которые в середине прошлого века имели довольно широкое распространение, комплекты для них продавались наряду с обычными шахматами.

Гексагональная доска Глинского состоит из 91 поля трех цветов – на рисунках белого, черного и серого (рис. 1, 2). На ней имеется 11 вертикалей от «а» до «l» (кроме «j»), поля каждой нумеруются снизу вверх. На крайних вертикалях по 6 полей, на центральной – 11. Роль горизонталей выполняют диагонали, слева от линии «f» – параллельные a1-f1, а справа – параллельные f1-l1. В дополнение к стандартному набору фигур каждая сторона получает по одному слону, серопольному, и одной пешке.

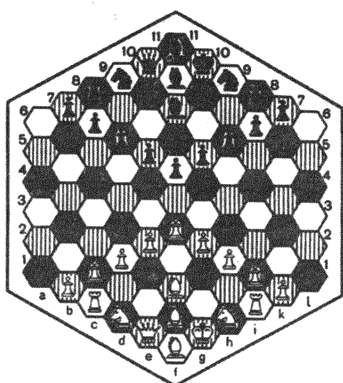


Рис.1 Исходная расстановка фигур в польских шахматах

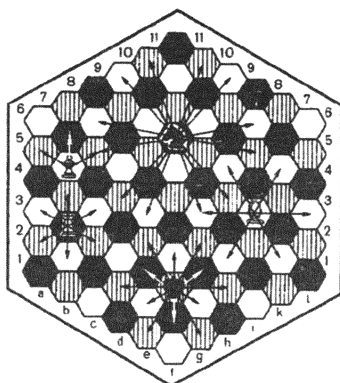


Рис.2. Как ходят фигуры

Начальное расположение фигур показано на рисунке 1, ходы – на рисунке 2. Король, как и полагается, ходит на все соседние поля – не только на непосредственно примыкающие к данному, но и на ближайшие того же цвета. Таким образом, с f3 он может пойти на одно из 12 полей, указанных стрелками. Столько же полей и в распоряжении коня, стоящего на f8. Ладья и слон перемещаются на любое число полей в одном из шести направлений (разных для этих фигур). Ферзь, объединяющий ходы ладьи и слона, движется в 12 направлениях (тех же, что и король) на любое число полей. Пешки ходят на одно поле по вертикали (в начале на два), бьют наискосок, например, с b5 на a5 и c6. Сохраняется и взятие на проходе – так, в ответ на c2-c4 черная пешка d4 может побить белую d4:c3. Достигая последнего поля своей вертикали, пешка превращается в любую фигуру. Рокировок нет – короли и так находятся в достаточной безопасности, а ладья за два хода подключается к атаке или защите. Остальные правила, в том числе цель игры – заматовать неприятельского короля, не меняются.

Конечно, ближе к границе доски число возможных ходов уменьшается. При желании можно найти силу шахматных фигур на шестигранной доске.

Доска для шахмат Шафрана (рис. 3) получается из польского варианта отбрасыванием линий f1-l1 и f11-l6 и двух правых вертикалей k1-k7 и l1-l6; в результате число полей сокращается до 70. Начальная расстановка напоминает обычную. Фигуры ходят, как и в шахматах Глинского, лишь пешка бьет иначе: под углом 60°, с b5 на a6 или c7. Пешки трех центральных вертикалей могут первым ходом пойти сразу на три поля вперед, остальные – на два. В данной игре существуют рокировки – короткая (ладья приближается к королю, и он переступает через нее) и длинная (король подходит к ладье, и та перепрыгивает через него).

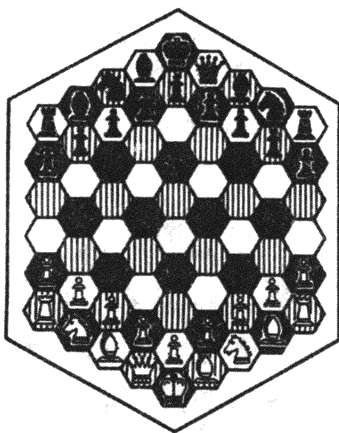


Рис. 3. Шахматы Шафрана

В польских шахматах доска представляет собой правильный шестиугольник – такая геометрическая четкость помогла Глинскому «обыграть» Шафрана в популярности игры, особенно

Здесь возможен только «детский» четырехходовый мат: 1. ♖e1-c3 ♜e10-c6 2. ♙h1-i3 ♙h9-i6 3. ♙i3-g6 e7-e6 4. ♜c3:f9× (белые) или 3... ♙i6-g5 4. e4-e5 ♜c6:f3× (черные). Забавно, что шах в этой игре возможен уже на первом ходу: 1. ♙g1-g2 ♙f10-d6+.

Интересно, что в начале 1950-х годов польские шахматы демонстрировались на Всемирной выставке в Париже. В 1980-м в Лондоне состоялся первый чемпионат Европы, а в 1984-м в Будапеште – второй, в котором участвовало 26 игроков из семи стран. Победителям обоих – поляку М. Мацковяку и венгру Л. Рудольфу – было присвоено звание гроссмейстера по гексагональным шахматам.

может по-прежнему контролировать «старые» поля. Получается, что конь в состоянии пройти по треугольнику, выигрывая важный темп. В обычных шахматах это невозможно.

В позиции на рисунке 4 у черного короля нет ходов: поля e6, d7, g6 и h7 держит белый слон, e7 и g7 – пешка, e8, e9, f9, g8 и g9 – король. Пешка белых f7 находится под защитой коня. Но ведь им надо играть...

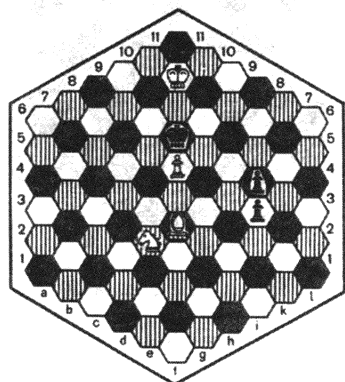


Рис.4. Мат в 4 хода

1. ♖e4-c5! Конь сдвинулся с места, но не выпустил из-под контроля пешку f7 – хитрый прием, упомянутый выше. 1...i4-i3 2. ♖c5-d8! Вновь пешка под защитой коня. Не годится 2. ♖e4? из-за 2...i4! и мата нет, но не 2...i2 3. ♖h4 и 4. ♖i6×.

2...i3-i2 3. ♖d8-g9 i2-i1 ♔ 4. ♖g9-i6×! Конь сделал четыре хода подряд, но пешка постоянно находилась под его защитой!

На рисунке 5 у черного короля, на первый взгляд, достаточно свободы, и быстро его не пленить...

1. ♗f11-l1! Неожиданное перемещение слона из одного угла шестиугольной доски в другой. Черные в цугцванге: любой ход короля ведет к красивому мату ферзем в центре доски. 1... ♕e6:d4 2. ♔g1-c2× – пригодился слон, взявший под прицел поле c2. 1... ♕e6:f8 2. ♔g1-g9× – и поле g9 контролируется слоном, притаившимся вдали от места основных событий. 1... ♕e6-f5 2. ♔g1-g3× – поле g3 также в зоне действия слона. Наконец, 1... ♕e6-d6 2. ♔g1-c6× – теперь белого ферзя поддерживает король.

Последняя задача (рис. 6) иллюстрирует так называемую тему Новотного (перекрытие), весьма распространенную в классической композиции.

1. g4-g6! Пешка стартует сразу на два поля вперед. Попутно возникает еще один задачный элемент – освобождение поля для другой фигуры. Теперь пешка оказалась в точке пересечения линий g1-g10 и a4-l4, которые находятся, соответственно, в распоряжении ладьи и слона.

1... ♖l4:g6 – траектория ладьи перекрыта, и 2. ♖h6-g4×; 1... ♗g9:g6 – траектория слона перекрыта, и 2. ♖h6-e6×.

Очевидно, на гексагональных досках можно решать те же математические задачи, что и на обычной, в том числе о марш-

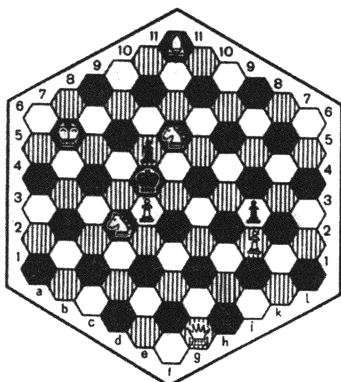


Рис. 5. Мат в 2 хода

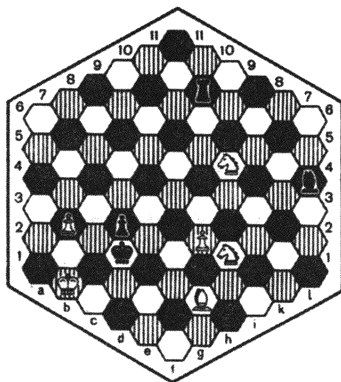


Рис. 6. Мат в 2 хода

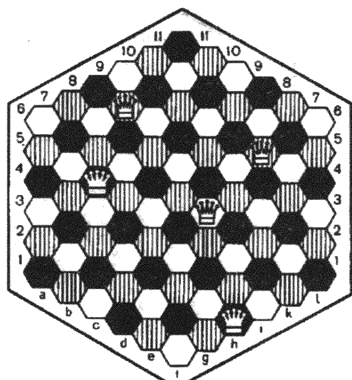


Рис 7. Пять ферзей-часовых на гексагональной доске

хватает и четырех ферзей, их можно поставить на поля c5, d8, g4 и i5.

рутах, доминировании и независимости фигур. Установлено, например, что на доске Глинского также достаточно расставить пять ферзей, которые будут держать под охраной все ее свободные поля (рис.7).

Хотя полей здесь почти в полтора раза больше, но и направлений перемещения ферзей во столько же раз больше — двенадцать вместо восьми. Так что неудивительно, что пять ферзей удерживают всю «гексагональную тюрьму». А на 70-клеточной доске Шафрана

СКАЗОЧНЫЕ ШАХМАТЫ

В предыдущих главах речь шла о разных играх, связанных с тем или иным преобразованием доски. Однако для получения новой игры совсем необязательно сооружать специальные доски, достаточно на обычной изменить правила или придумать оригинальную фигуру. Именно таким играм посвящена последняя глава, завершающая рассказ о сказочных, фантастических шахматах.

Шахматы с шахами и без шахов. В игре *до первого шаха* все, как в настоящих шахматах, только выигрывает не тот, кто первым ставит мат, а тот, кто первым объявляет шах! При обычной начальной позиции белые форсированно берут верх, причем не позднее пятого хода.

1. ♖с3. Грозит выпад конем на е4, d5 или b5 с неизбежным шахом, у черных единственный ответ 1...e6 (1...e5 2. ♖d5 и 3. ♖f6+), и после 2. ♖e4 ♕e7 3. ♖f3 второй конь с решающим эффектом вступает в игру: 3...♖e8 (3...d6 4. ♖d4) 4. ♖e5, и шах следующим ходом (рис.1).

Чтобы оживить игру, следует каким-то образом изменить начальную позицию, например, сдвинуть белую пешку с c2 на c3, а черную с c7 на c6. Теперь нет вступительного хода 1. ♖с3, и форсированного выигрыша не видно: после 1. ♖b3 d5 2. ♖b4 ♖d6! 3. ♖a4 ♙d7 4. ♖h4 ♖f6 черный король пока надежно защищен от шахов.

В шахматах без шахов фигуры тоже ходят обычным образом, но объявлять шах запрещено, вернее, первый же шах должен быть и матом. В шахматах с шахами, наоборот, если шах есть, то его надо объявлять (любым способом). А давным-давно, помню, была игра, в которую верх брал тот, кто первым объявлял три шаха.

Двухходовые шахматы. В этой игре каждый ход состоит из двух обычных (после первого в «цикле» король может находить-

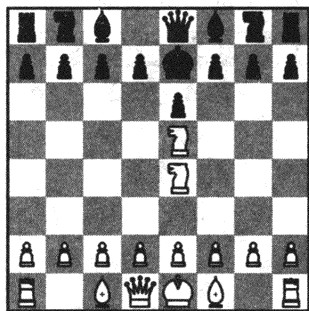


Рис.1. До первого шаха

ся под шахом). Небольшое изменение правил, а уже имеет место следующий неожиданный факт.

При правильной игре в двухходовые шахматы белым, по меньшей мере, гарантирована ничья.

Предположим противное. Пусть белые, как бы они ни играли, всегда проигрывают. Тогда сделаем ход 1. ♖b1-c3-b1. Белые передают очередь хода партнеру и фактически сами становятся черными, т.е., по предположению, выигрывают – противоречие.

Это доказательство, как говорят математики, неконструктивно. Мы доказали, что белые могут не проиграть в двухходовые шахматы, но не установили, как это сделать. Более того, если удастся доказать, что белые форсированно выигрывают (как, например, в игре до первого шаха), то тогда, очевидно, первый ход 1. ♖b1-c3-b1 проигрывает. В этом случае получится, что доказательство беспроигрышности белых проведено с помощью проигрывающего хода!

Вот одна из распространенных модификаций двухходовых шахмат. У одного игрока полный комплект фигур, которые ходят обычным образом, а у другого лишь король и несколько пешек, но он делает по два хода сразу. Цель обеих сторон – побить неприятельского короля. Эта игра довольно хитрая: кто

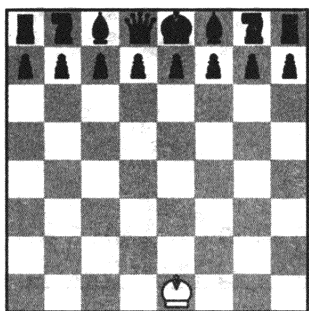


Рис.2. Король белых делает два хода подряд

впервые знакомится с ней, обычно выбирает фигуры с нормальными ходами и... быстро проигрывает.

Действительно, делая по два перемещения за один раз, один голый король уже на четвертом ходу может торжествовать победу. На рисунке 2 первый двойной ход белых 1. ♖e1-e2-e3. На одинарный ход 1...e7-e5 следует 2. ♖e3-e4:e5, на шах 2...♔d8-e7+ – энергичное 3. ♖e5-d6:c7!, и следующим ходом белый король бьет черного.

Впрочем, если черные действуют осторожно и в позиции на рисунке 2 не подпускают белого короля к своему собственному, то они берут верх в двухходовые шахматы. Например, двигая свои крайние пешки, быстро проводят ферзя, после чего несколько тяжелых фигур легко сооружают мат.

В «двухходовом» этюде Н.Петровича на рисунке 3 после 1. ♔d6-f8, ♖d8-e7+! король черных в опасности, но, кажется, они легко отражают угрозу – 1...♔h5-h6:f8 с победой, так как

при взятии королем на f8 у белых нет подходящего второго хода пары. Грозит ♔ h7-g7:f8, и белому королю никуда не деться. Однако неожиданно следует 2. ♚ e7-e6-f5!, и следующим двойным ходом белый король забирает черного – 2. ♚ f5:g6:h7. А тому мешает это сделать собственная ладья g6. Но не годится, например, 1. ♖ b8, ♚ e7 из-за 1... ♜ g7, ♚ h6!, и черный король неуязвим.

Шахматы без цугцванга. Если любой ход белых проигрывает, мы говорим, что они в цугцванге (а если проигрывает и любой ход черных, то цугцванг взаимный). Шахматы без цугцванга отличаются от обычных добавлением всего одного хода – хода на месте. Теперь цугцванга не бывает: если нет хорошего хода, его очередь можно передать партнеру. Здесь, как и в двухходовых шахматах, белым гарантирована ничья.

Поддавки. Более популярны шашечные поддавки, но и шахматные весьма интересны. Понятие мата здесь отсутствует, и победителем становится тот, кто первым отдаст все свои фигуры или запатует их. Взятие обязательно, а если есть выбор, то брать можно любую фигуру, включая короля.

Конечно, и в этой игре возможна ничья, например, у соперников остались разнопольные слоны, или по королю, которые никогда не сблизятся, а будут вечно блуждать по доске.

Любопытно, что в шахматных поддавках имеется своя необычная теория. Как это ни парадоксально, но уже первый ход пешки «е» или «d» на два поля вперед является решающей ошибкой. Черные форсированно отдают все свои фигуры.

1. e4? b5 2. ♜ :b5 ♜ f6 3. ♜ :d7 ♜ :e4 4. ♜ :c8 (возможность 4. ♜ :e8 рассмотрена ниже) 4... ♜ :d2 5. ♜ :d2 ♖ :d2 6. ♖ :d2 ♜ a6 7. ♜ :a6 ♜ c8 8. ♜ :c8 f5 9. ♜ :f5 ♜ g8 10. ♜ :h7 c5 11. ♜ :g8 e6 12. ♜ :e6 c4 13. ♜ :c4 a6 14. ♜ :a6 g5 15. ♖ :g5 ♚ d8 16. ♖ :d8 ♜ e7 17. ♖ :e7, и на доске остались одни

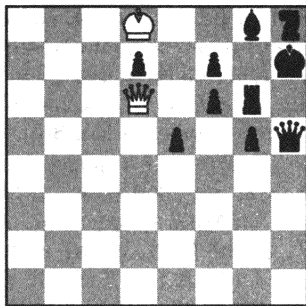


Рис.3. Выигрыш в двухходовые шахматы

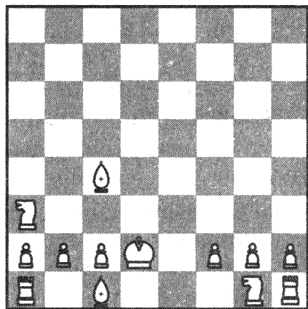


Рис.4. Партия в поддавки закончилась победой черных

белые фигуры. На 4. ♖:e8 решает 4... ♜:d2 5. ♜:d2 (5. ♖:f7 ♜:c1 6. ♜:c1 ♘:f2 7. ♘:f2 ♞g8 и т.д.) 5... ♘:d2 6. ♞:d2 ♞g8 7. ♖:f7 c5 8. ♖:g8 g6 9. ♖:h7 e5 10. ♖:g6 e4 11. ♖:e4 ♘c6 12. ♖:c6 ♖b7 13. ♖:b7 ♞c8 14. ♖:c8 a6 15. ♖:a6 c4 16. ♖:c4 ♖a3 17. ♖:a3, и черные взяли верх в поддавки (рис.4).

Еще проще опровергается первый ход ферзевой пешки: 1. d4 e5! 2. de ♜g5! 3. ♜:d7 ♖:d7 (этот размен на d7 может произойти и позднее) 4. ♖:g5 ♘d8 5. ♖:d8 a6 6. ♖:c7 ♞a7 7. ♖:b8 b6 8. ♖:a7 a5 9. ♖:b6 g6 10. ♖:a5 ♖b4 11. ♖:b4 ♘e7 12. ♖:e7 ♞f8 13. ♖:f8 h6 14. ♖:h6 g5 15. ♖:g5 f6 16. ♖:f6 ♖h3 17. ♖:h3. Победа за черными!

Нетрудно убедиться, что и движение пешки «d» на одно поле вперед тоже ничего не меняет – черные одну за другой отдают все свои фигуры.

Оригинальные и неожиданные идеи содержатся и в окончаниях. Очевидно, проще, чем на рисунке 5, положение не придумаешь. Но посмотрите, сколько тонкостей в нем содержится!

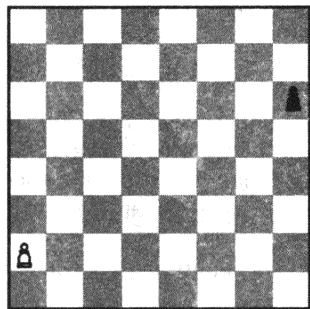


Рис.5 Выигрыш в поддавки

1. a3! Белые, как говорят в таких случаях, уступают темп противнику – обычный прием в нормальных шахматах. 1...h5 2. a4 h4 3. a5 h3 4. a6 h2 5. a7 h1 ♞!

Если черные ставят ферзя или слона, то после любого превращения белой пешки они вынуждены будут сразу взять новую фигуру. На 5...h1 ♘ следует 6. a8 ♜ и 7. ♜h1! Если на доске появится черный король (в поддавках возможно и такое) – 5...h1 ♚, то не годится 6. a8 ♜ или 6. a8 ♘ из-за 6... ♚g2. К ничьей ведет и 6. a8 ♚ или 6. a8 ♘, а решает 6. a8 ♞! ♚g2 7. ♞a4 ♚f2 8. ♞d4 ♚g2 9. ♞e4 ♚h2 10. ♞f4 ♚h1 11. ♞f3 ♚g2 12. ♞f2 ♚:f2, и белые избавляются от своей фигуры.

6. a8 ♘!! Белая пешка превращается в еще более слабую фигуру, иначе черные легко отдадут свою ладью. Теперь же на любое ее движение следует 7. ♖h1! ♞h1, и игра в шахматные поддавки закончилась в пользу белых.

Изменение начальной позиции. Получить новую игру можно без введения особых правил, достаточно в исходной позиции поменять местами некоторые фигуры. В результате классическая теория дебютов полностью теряет свое значение. При изменении позиции пешки обычно остаются на своих местах, а

фигуры расставляются тем или иным образом за пешечным частоколом.

Некоторые новаторы предлагают ограничиться перестановкой короля и ферзя. Наивные люди! Хотя новая игра непривычна, она не отличается от стандартных шахмат. Поставьте рядом с доской зеркало и играйте, глядя в него (цвет полей поменялся, но можно не обращать на это внимание). Зеркальное отражение исходной позиции совпадает с обычной, и «ферзевый гамбит» может неожиданно закончиться «детским» матом: 1. d4 d5 2. ♖f4 ♗f6 3. ♜a5 ♗c6 4. ♜:c7×.

Имеется немало забавных способов получить начальную расстановку фигур. Например, белые ставят одну из своих фигур на поле первой линии, черные ту же фигуру – на последнюю и, в свою очередь, выбирают поле для следующей. Теперь белые ставят ту же фигуру напротив, и т.д. После завершения процедуры ни у одного из партнеров не будет оснований считать себя обиженным...

А вот другой увлекательный способ расположения фигур. В середине доски ставится экран, и соперники по секрету друг от друга располагают на своей территории фигуры и пешки, как им заблагорассудится. Затем экран снимается, и начинается игра по обычным правилам, но под названием «шахматы втемную».

С последней игрой связано одно интересное обобщение. Фигуры расставлены обычным образом, но зато втемную протекает сама партия! Каждый делает ходы на своей доске, причем белые не знают, как ходят черные, а черные – как ходят белые. За игрой следит посредник. Если один из игроков нарушает правила, то посредник сообщает ему об этом. Тот меняет ход, делая соответствующие выводы о дислокации неприятельских фигур. Партия заканчивается, когда после очередного хода посредник сообщает, что на доске мат.

Фишеровские шахматы. Самая популярная игра, в которой фигуры нестандартно стоят на крайних линиях. Пешки стоят на обычных местах, а положение фигур за ними определяется жребием. При этом должны выполняться три условия: 1) у каждой из сторон слоны разноцветные; 2) ладьи находятся по разные стороны от королей; 3) белые и черные фигуры расположены симметрично.

Как уже говорилось, всего расстановок, удовлетворяющих этим условиям, существует 960. Поэтому шахматы Фишера называются также рэндом («gandom» можно перевести с английского как «выбранный наугад») или рэндом-960.

Главный смысл игры состоит в том, что при сохранении

основных принципов удается избежать плавания в бесконечном море дебютных вариантов, отказаться от изнурительной домашней подготовки. И правда, в современных шахматах, объем информации достиг угрожающих размеров, в дебютных базах накоплены миллионы партий, и собственное творчество порой начинается после 30 ходов. Чтобы шахматы снова стали состязанием интеллектов, а не голой памяти, Фишер и придумал свою игру. Сейчас по ней проводятся различные турниры, даже чемпионаты мира с участием известных гроссмейстеров.

Рокировка в рэндоме довольно необычна: при короткой рокировке (участвует ладья справа) белый король попадает на g1, ладья на f1; соответственно, черный король – на g8, ладья на f8. При длинной рокировке (участвует ладья слева) белый король попадает на c1, ладья на d1; соответственно, черный король – на c8, ладья на d8. Очевидно, необходимые поля должны быть свободны, а после рокировки король не должен попасть под шах.

Накопленная практика игры показывает, что в фишеровских шахматах многое зависит от исходной позиции. В некоторых расстановках у черных сразу нелегкая ситуация, но ведь и в обычной игре по дебюту им бывает несладко. Однако если в классике известны пути усиления дебютного преимущества, то здесь не всегда ясно, могут ли белые сохранить перевес. С другой стороны, имеются и такие положения, в которых естественное для обычных шахмат вступление неожиданно ведет к большим неприятностям для белых.

Например, стандартное **1. e4** может быть сразу опровергнуто путем **1...f5!!** (рис.6). Классический двойной удар! Грозит **2... ♗:a2** с выигрышем качества, и черные уже на втором ходу забирают на e4, оставаясь с лишней пешкой...

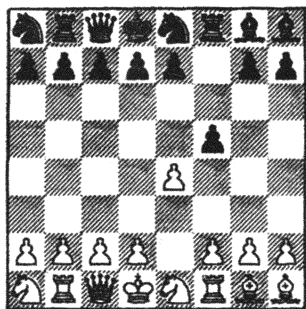


Рис.6. Черные берут верх на первом ходу!

Волшебные фигуры. До сих пор речь шла об играх на необычных досках и с необычными правилами, но фигуры передвигались, как в настоящих шахматах. Безграничное море игр, задач и головоломок возникает при появлении на доске скаковых, волшебных фигур, наделенных разными фантастическими свойствами.

Магараджа. Эта фигура объединяет в себе ходы ферзя и коня.

Она является главным действующим лицом в следующей интересной игре.

У одного игрока полный комплект фигур, стоящих на исходных местах, а у другого – лишь один магараджа, стоящий на произвольном поле. Магараджа проигрывает, если его удастся побить, и выигрывает, если ставит мат неприятельскому королю.

Пешкам запрещено превращаться, иначе выигрыш слишком прост. Но при этой оговорке магараджа оказывает упорное сопротивление, а неопытный игрок быстро получает мат, даже владея всей армией фигур. И все же имеется форсированный способ расправиться с этой фигурой, причем цель достигается всего за 15 ходов.

Не обращая внимания на перемещения магараджи, белые делают подряд следующие ходы: **1–14. a4, h4, ♖c3, ♜f3, ♚a3, ♚h3, ♚b3, ♚g3, d4, ♔d3, ♔e4, ♚b7, ♔d5, ♚g8.** При этом магараджа не побьет ни одну из белых фигур (они надежно защищают друг друга), и теперь у него имеются лишь два свободных поля – a6 и f6. На поле a6 он гибнет после **15. ♜g5** (рис. 7), а на поле f6 – после **15. e4.**

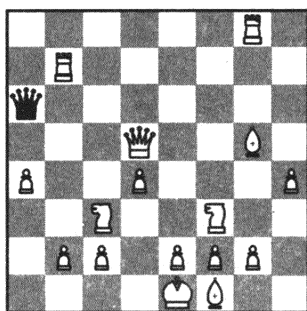


Рис.7. Гибель магараджи

Как мы знаем, на доске можно расставить восемь мирных ферзей.

А как обстоят дела с магараджами? Проанализировав все 12 основных расстановок ферзей (см. с.49), убеждаемся, что в каждой из них по меньшей мере три пары ферзей связаны между собой ходом коня, т.е. восемь магараджей вместе не уживаются. На доске 9×9 девять ферзе-коней также не могут находиться в безопасности. И лишь на доске 10×10 удастся расставить 10 магараджей, не угрожающих друг другу, причем имеется всего одно основное решение (рис.8, здесь ферзи играют роль магараджей), из которого другие получаются при

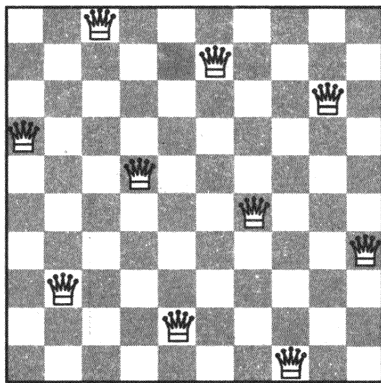


Рис.8 Десять мирных фигур

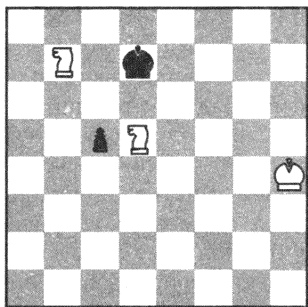


Рис.9 Мат в 4 хода, на b7 и d5 – драконы

поворотах и зеркальных отражениях доски.

Магараджа лишь одна из десятков сказочных фигур, придуманных любителями нетрадиционных подходов. Со многими из них придумано множество интересных игр, задач и головоломок. Из комбинированных фигур отметим *царицу* (императрицу), объединяющую ладью и коня, *принцессу* (кентавра): слон + конь, *дракона*: конь + пешка (обозначается Д, превращаться

в другие фигуры дракону запрещено).

В задаче Я.Владимирова на рисунке 9 у черных два хода – королем на e8 (остальные поля ему недоступны) и пешкой.

1. ♖g5! c4 2. Дc5+ ♜c8 3. Дc6! (черный король запатован) 3...c3 4. Дb6×, 2... ♜d8 3. Дd6! c3 4. Де6×, 2... ♜e8 3. Де6 c3 4. Дf6×. В случае 1... ♜e8 решает 2. Дf6+ ♜f8 3. Дd8! c4 4. Де6× (2... ♜f7 3. Дd8+ ♜f8 4. Де6×).

Напомним, что обычный конь (1, 2) – это частный случай фигуры (a, b). Различные сказочные персонажи получаются из этого обобщенного коня при выборе тех или иных значений a и b. Конь (1, 3) – *верблюд* (В), он перемещается на одно поле вдоль одной линии и на три вдоль другой. Очевидно, верблюд – одноцветная фигура, как и слон. Конь (1, 4) – *жираф*, (2, 3) – *зебра*, (3, 4) – *антилопа*. Если одно из чисел a, b равно 0, получаем ладью, которая перемещается на фиксированное число полей, а при a = b – в слона, обладающего тем же свойством. Коня, совершающего несколько ходов подряд в определенном направлении, например, ♞b1-d2-f3-h4 или ♞b1-c3-f5-e7, именуют

всадником (Вд, изображается как перевернутый конь, см. рис.11).

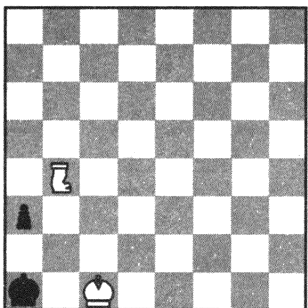


Рис.10 Мат в 2 хода

В задаче на рисунке 10 при обычном коне на b4 это была бы старинная задача с длинным заданием – мат в 6 ходов – 1. ♞c2+ ♜a2 2. ♞d4 ♜a1 3. ♜c2 ♜a2 4. ♞e2 ♜a1 5. ♞c1 a2 6. ♞b3×. Но на b4 – всадник, который ставит мат, далеко удаляясь от черного короля: 1. Вдс6! a2 (всадник продолжает кон-

тролировать поле a2, поэтому оно недоступно королю) **2. Вдg4×!** (с поля g4 всадник нападет на неприятельского короля по линии g4-e3-c2-a1).

Рассмотрим две математические задачи про верблюда. Напомним, что на обычной доске, с одной стороны, конь может обойти всю доску, а с другой – можно расставить 32 мирных коня. Те же вопросы возникают для верблюда.

Существует ли замкнутый маршрут верблюда по всем полям шахматной доски? Какое наибольшее число верблюдов можно расставить на шахматной доске, чтобы они не угрожали друг другу?

Решение обеих задач показано на рисунке 11. Поля, по которым проходит верблюд, последовательно занумерованы числами от 1 до 32. Поскольку поля 1 и 32 связаны между собой ходом верблюда, маршрут является замкнутым. 16 мирных верблюдов, как и 32 мирных коня на обычной доске, занимают половину доступных им полей (их можно поставить на все поля с нечетными номерами).

Фигуры-животные присутствуют во многих сказочных играх. Так, в игре *джунгли* (древняя форма китайских и индийских шахмат) есть *собаки, волки, коты, пантеры, крысы...* В старинных играх встречаются *мудрецы, шуты, епископы* и другие экзотические личности. Некоторые шахматные фигуры имеют «военные должности»: *гренадеры, саперы, солдаты, офицеры, генералы*. После первой мировой войны на доске появились грозные фигуры *танков* и *самолетов*, а после второй – была изобретена *атомная бомба*, в которую превращается пешка, достигнув крайней линии. Эта страшная фигура ставится на любое поле доски и «взрывается», уничтожая все вокруг себя в заданном радиусе.

Вот еще несколько фигур, которые можно встретить в мире шахматной фантастики. *Сверчок* ходит, как ферзь, но перепрыгивает через любую фигуру, останавливаясь сразу за ней. *Лев*, в отличие от сверчка, приземляется на любом поле за перепрыгнутой фигурой. *Сверхслон* ходит, как обычный слон, но может также отражаться от краев доски, подобно бильярдному шару. *Нейтральными фигурами* могут играть и белые, и черные, а *бьющим фигурам* разрешается делать ход только со взятием.

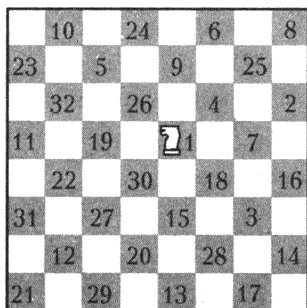


Рис.11. Верблюд на шахматной доске

Бьющий конь – *гиппопотам*, а бьющий ферзь – *динозавр*. *Рентгеновские фигуры* оказывают воздействие на поля доски сквозь другие фигуры. *Дипломат* сам не ходит, но его брать нельзя, а около дипломата фигура того же цвета неприкосновенна. Фигура *камикадзе* (самоубийца) убирается с доски вместе со взятой фигурой.

Немало разновидностей и у сказочных пешек. *Пешка-хамелеон* при взятии превращается во взятую фигуру, но своего цвета. *Сверхпешка* ходит на любое число полей по вертикали и бьет на любое число полей по диагонали. *Пешка-такси* движется вперед и назад. *Берлинская пешка* ходит по диагонали, а бьет по вертикали. *Неподвижная пешка* сама не ходит и не бьет, а ее брать можно. *Пешка замедленного действия* превращается только во взятые фигуры, а если их пока нет, ждет своего часа.

Максимуммер. В этом жанре сказочных задач черные обязаны делать геометрически самые длинные ходы. Так, любой ход конем имеет длину $\sqrt{1^2 + 2^2} \approx 2,23$, а ход ферзем с a1 на f6 длиннее, чем на a8: $\sqrt{2 \times 5^2} \approx 7,05 > 7$. Максимуммеры чаще всего встречаются в задачах на обратный мат – белые начинают и заставляют черных объявить мат в заданное число ходов.

На рисунке 12 черные обязаны делать самые длинные ходы ферзем. 1. ♔a2! ♚a6+ 2. ♔b1 ♚h6 3. ♚a2! ♚c1× (ход ферзем на c1 длиннее, чем на a6).

Конь и верблюд. Необычные игры и задачи придумывают не только композиторы-фантасты, но и мастера занимательной математики и интеллектуальных развлечений. Такие игры часто допускают исчерпывающий анализ, и интерес представляет не сам процесс игры, а нахождение четкого алгоритма, гарантирующего победу или ничью. Вернемся еще раз к верблюду.

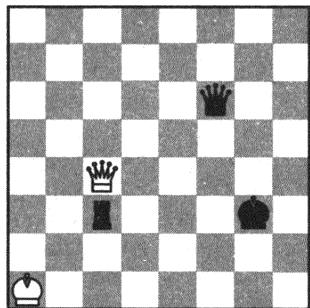


Рис.12 Обратный мат в 3 хода – максимуммер

В углу квадратной доски произвольных размеров стоит конь, которым партнеры ходят по очереди. Первый игрок перемещает его как верблюда (3,1), а второй – как обычного коня, но с двойным ходом (как в двухходовых шахматах). Задача второго – загнать фигуру в противоположный угол доски, первый старается помешать ему. Чем закончится схватка?

В этом несколько странном со-

перничестве коня и верблюда (точнее было бы говорить о хамелеоне, превращающемся то в одну фигуру, то в другую) победителем становится тот, у кого обычный конь. Действительно, если фигура стоит на большой диагонали, проходящей через угол, где она вначале располагалась, то после любого отступления с нее верблюда конь своим двойным ходом возвращается на эту диагональ, причем по крайней мере на одно поле ближе к цели (в этом и заключается алгоритм игры). В конце концов конь попадает в необходимый угол.

Кошки-мышки. У одного игрока единственная фигура – мышка, у другого несколько фигур – кошек. Мышка и кошки ходят одинаково – на любые соседние поля по вертикали и горизонтали. Если мышка попадает на край доски, то очередным ходом спрыгивает с нее – убегает от кошек; если кошка и мышка очутились на одном поле, то кошка съедает мышку.

Борьба кошек с мышкой протекает на обычной доске, соперники ходят по очереди, но второй игрок передвигает своим ходом сразу всех кошек (в любых направлениях). Начинает мышка, которая старается спрыгнуть с доски, кошки же хотят ее догнать. Есть два варианта игры:

а) Кошек две, мышка находится на внутреннем поле доски. Могут ли кошки так разместиться на краях доски, чтобы в конце концов поймать мышку?

б) Кошек три, расположены они произвольно на доске; мышка вначале делает два хода подряд. Всегда ли она убежит от кошек?

Покажем, что в первом случае мышке не уйти от погони, а во втором, наоборот, она благополучно скрывается от кошек.

а) Через поле с мышкой проведем диагональ и посадим кошек на ее концах. На каждый ход мышки кошки ходят так, чтобы все три фигуры снова оказались на одной диагонали, а расстояние между кошками сократилось на одно поле. Такая стратегия позволяет кошкам быстро съесть мышку.

б) Рассмотрим две диагонали, проходящие через поле, на котором сидит мышка. Если оно не крайнее (иначе мышка сразу спрыгнет с доски), то эти диагонали разбивают доску на четыре части. Поскольку кошек три, внутри одной части их нет, и мышке нужно отправиться внутри нее в перпендикулярном направлении к краю доски. В конце концов она убегает от кошек.

Ферзь в угол. На доске стоит ферзь, которым два игрока по очереди ходят на любое число полей вверх, вправо или по диагонали (отступать запрещено). Выигрывает тот, кто своим ходом загонит ферзя в правый верхний угол доски, поле h8.

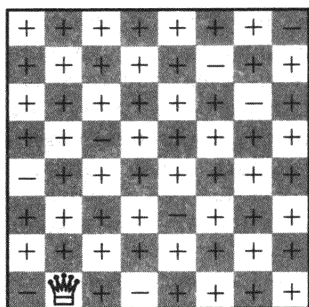


Рис.13. Ферзя в угол

вынужден пойти на поле с плюсом, то оно, естественно, получает минус. Если же у ферзя есть в запасе ход на минус, то поле получает плюс, и т.д. Продолжая эту процедуру, мы в конце концов на всех полях доски расставим необходимые знаки. В результате оказывается, что семь полей являются «проигрышными» для белых, а остальные – «выигрышными», причем ферзь попадает в угол не позднее третьего хода.

Если в начале игры ферзь стоит, скажем, на b1, то партия может протекать так: 1. ♔ d1 (быстрее к цели ведет ♔ g6!) 1... ♔ d2 2. ♔ e3! (единственный ход) 2... ♔ e7 3. ♔ f7! ♔ h7 4. ♔ h8 с победой.

Указанный принцип расположения плюсов и минусов легко переносится на произвольную доску, т.е. игра всегда поддается исчерпывающему анализу.

Игра в ферзей. Вот игра, которая имеет прямое отношение к задаче Гаусса о восьми ферзях. Двое по очереди ставят ферзей – один на вертикаль «а», второй – «b», третий – «с» и т.д., при этом никакие два не должны нападать друг на друга. Проигрывает тот, кто не в состоянии сделать очередной ход.

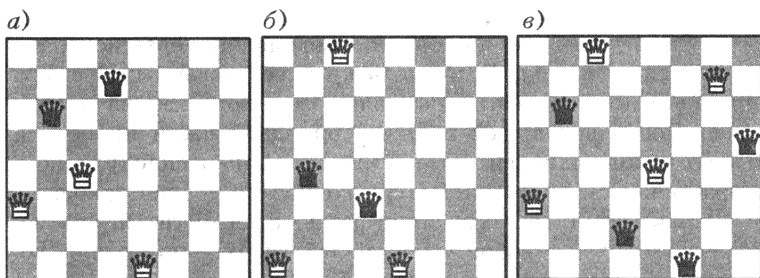


Рис.14 Белые ферзи против черных

На рисунке 14 приведены две короткие партии. На рисунке 14,а белые (первый игрок) выиграли в 5 ходов – все поля вертикали «f» под контролем ферзей, и у черных нет хода. На рисунке 14,б в 4 хода выиграли черные (второй игрок) – на вертикали «е» не осталось ни одного поля, доступного белому ферзю. Кстати, это самая короткая партия. При любой расстановке трех мирных ферзей на вертикалях «а», «b» и «с» на вертикали «d» найдется еще хотя бы одно поле для четвертого.

Есть и другой вариант: сделавший последний ход выигрывает столько очков, сколько свободных вертикалей осталось на доске. При таком условии в первом случае белые выиграли 3 очка, а во втором черные – 4.

Каков результат этих игр при наилучших действиях обеих сторон? Для ответа на вопрос можно перебрать все возможные партии (их около семи тысяч), но это занятие довольно скучное. Работа была поручена компьютеру, который пришел к следующим выводам. В первом варианте побеждают черные, во втором партия заканчивается вничью: черные делают последний ход, но их выигрыш составляет 0 очков! Одна из ничейных партий представлена на рисунке 14,в.

Шашматы. Итак, мы познакомились с различными шахматными играми на нестандартных досках, с необычными правилами и сказочными фигурами. В игре шашматы, которую придумал американский математик С.Голомб, одновременно используются все три необычных элемента.

Как видно из названия, игра представляет собой смесь шахмат и шашек: фигуры в ней шахматные, но перемещаются они только по черным полям доски – как в шашках (на рисунке 15 показана начальная расстановка фигур).

Набор фигур в шашматах несколько иной, чем в шахматах. Короли ходят только на соседние черные поля. Слон не отличается от шахматного, а пешки ходят, как шашки. Поскольку обычный конь (1, 2) не в состоянии сделать на шашматной доске ни одного хода (он тут же попадает на запретное белое поле), его заменяют верблюдом В (1,3), который перемещается по полям одного цвета. Короли и пешки бьют, как в шашках (перепрыгивая через фигуры, пешки – только вперед), а слон и верблюд –

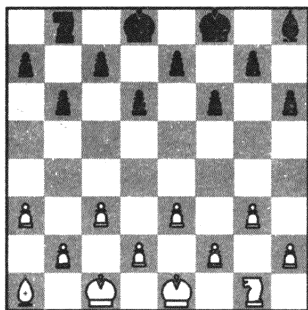


Рис 15 Шашматы

как в шахматах (занимая поле взятой фигуры). Взятие королем и пешкой обязательно (как в шашках), а слоном и верблюдом – нет (как в шахматах). Если есть выбор между шахматным и шашечным взятием, то он произволен (но что-то брать надо). Достигнув крайней горизонтали, пешка превращается в любую из трех фигур. Превращая пешку в слона или верблюда, игрок увеличивает свой атакующий потенциал, а превращая в короля – укрепляет защиту. Действовать, конечно, надо по обстоятельствам. Цель игры – уничтожить неприятельских королей или лишить всех его фигур подвижности (в данном случае это не пат, а победа). Вот показательная партия в шашматы двух англичан.

Кохен – Симс. 1. cb4 fe5 2. bc3 gf6 3. cd4 e:c3 4. ♖:c3 dc5 5. b:d6 e:c5 6. ef4 fe5 7. f:d6 c:e5 8. gf4 e:g3 9. ♗:h8 Bb8-e7 10. f:h4 Be7:h8 11. dc3 Bh8-e7 12. ♘f2 cd4 13. c:e5 Be7-d4 14. ♘b2 Bd4:a3 15. ef6 Ba3-d4 16. fg7 hg5 17. h:f6 ♘:h6 18. Bg1-h4 Bd4-g5 19. ♘g3 Bg5:h2 20. Bh4-e5 Bh2-e3 21. Be5:d8 Be3:f6 22. Bd8-e5 ♘g7 23. Be5-d8 ♘f8 24. Bd8:a7 Bf6:g3 25. Ba7-d6 Bg3-d4 26. ♘c3 ♘e7 27. ♘:e5 ♘:c5. Белые сдались, так как король и пешка противника легко справляются с их королем.

Итак, читатель ознакомился с 16 направлениями в шахматной математике. Рассмотреть весь этот жанр в одной книге невозможно, тем более что она имеет ограниченный объем. Какие же разделы остались неохваченными?

Как уже говорилось в предисловии, это те, которые ближе к шахматам, чем к математике. Прежде всего можно выделить две темы – «Математика шахматной игры» и «Многоликая симметрия». Первая больше относится к практической игре, вторая – к шахматным этюдам. Как мы убедились в первой главе, шахматная доска обладает своеобразной геометрией, особенно это проявляется в эндшпиле. В пешечных окончаниях существуют строгие, почти математические закономерности: теория соответственных полей, правило квадрата, метод треугольника, ключевые и критические поля, оппозиция и т.д. Геометрические мотивы то и дело встречаются и в этюдной композиции, особенно эффектны геометрические идеи симметрии.

В разделе шахматной композиции, который называется ретроанализ, приходится производить различные арифметические подсчеты, связанные с прошлым позиции, т.е. без математики тут тоже не обойтись. Соответствующий раздел следовало бы назвать «Путешествие в прошлое».

Список необычных игр на шахматной доске могли бы пополнить «Логические игры», а также упомянутые нами «Фишеровские шахматы» – и те, и другие заслуживают самостоятельной главы.

«Математика турниров» и «Рейтинги шахматистов» – интересные и важные направления. Много интересных математических задач и подходов возникает при анализе систем проведения шахматных турниров (круговая, олимпийская, швейцарская и т.д.), расчет рейтингов основан на теории вероятностей. Однако непосредственно шахматные атрибуты здесь не участвуют, а мы включали в книжку только задачи и головоломки с участием доски и фигур.

И наконец, отсутствуют в книге компьютерные шахматы – тема родственная математике, но все же она стоит несколько в стороне. По сравнению с 1983 годом (когда вышло первое издание «Шахмат и математики») успехи машин очень велики

(они уже обыгрывают чемпионов мира), здесь накопился огромный материал, и теперь эта тема стала предметом специального исследования. В принципе здесь возникают по меньшей мере два отдельных раздела – «Компьютерные шахматы» и «Машины анализируют». Дело в том, что алгоритмы шахматной игры и анализа окончаний существенно отличаются, причем и там, и там компьютеры имеют свои серьезные достижения.

Итак, было бы неплохо пополнить нашу книгу еще девятью указанными разделами и довести ее до 25 глав (данное количество и упомянуто в предисловии). Возможно, это удастся сделать в следующем издании «Шахмат и математики»...

Как уже сказано, в список литературы можно было бы включить десятки и сотни шахматных и математических изданий, книг по занимательной математике и развлечениям, публикации по комбинаторике, теории графов, теории вероятностей, компьютерам, статьи в серьезных математических журналах и в научно-популярных. Автор решил ограничиться перечнем 35 популярных книг на русском языке, изданных в разные годы и имеющих отношение к шахматной математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акулич И.* Королевские прогулки – М., Бюро Квантум, 2008.
2. *Аренс В.* Математические игры и развлечения. – М.-Л., 1924.
3. *Берж К.* Теория графов и ее применения. – М., 1962.
4. *Васильев Н., Савин А., Егоров А.* Избранные олимпиадные задачи. Математика. – М., Бюро Квантум, 2007.
5. *Виленкин А., Виленкин П.* Комбинаторика. – М., 2006.
6. *Владимиров Я.* 1000 шахматных загадок. – М., 2004.
7. *Владимиров Я.* 1000 приключений на шахматной доске. – М., 2006.
8. *Гик Е.* Занимательные математические игры. – М., 1987.
9. *Гик Е.* Интеллектуальные игры. – М., 2005.
10. *Гик Е.* Необычные шахматы. – М., 2001.
11. *Гик Е.* Математика на шахматной доске. – М., 2009.
12. *Гик Е.* Энциклопедия умных игр. – М., 2009.
13. *Гарднер М.* Крестики-нолики. – М., 1988.
14. *Гарднер М.* Математические досуги. – М., 1972.
15. *Гарднер М.* Лучшие математические игры и головоломки. – М., 2009.
16. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. – М., 1971.
17. *Гарднер М.* Математические новеллы. – М., 1974.
18. *Голомб С.* Полимино. – М., 1974.
19. *Горбачев Н.* Сборник олимпиадных задач по математике. – М., 2006.
20. *Данези М.* Величайшие головоломки мира. – М., 2009.
21. *Дьюдени Генри Э.* Кентерберийские головоломки. – М., 1979.
22. «Квант» для младших школьников: числа, верблюд, ковбой... (составитель А.Егоров). – М., Бюро Квантум, 2004.
23. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. – М., 1973.
24. Математические турниры имени А.П.Савина. – М., Бюро Квантум, 2003.
25. Математический цветник. Сборник статей и задач. – М., 1983.
26. *Окунев Л.* Комбинаторные задачи на шахматной доске. – М.-Л., 1945.
27. Рассуждая логически... – М., Бюро Квантум, 2001.
28. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. – М., 1963.

29. *Спивак А.* Математический праздник. – М., Бюро Квантум, 2004.
30. *Спивак А.* Тысяча и одна задача по математике. – М., 2010.
31. *Толпыго А.* Девяносто шесть нестандартных задач. – М., 2008.
32. *Успенский В.* Треугольник Паскаля. – М., 1979.
33. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. – М., 1981.
34. *Шуберт Г.* Математические развлечения и игры. – Одесса, 1923.
35. *Яглом А., Яглом И.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении. – М., 1954.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. МАТЕМАТИКА ШАХМАТНОЙ ДОСКИ	5
Глава 2. КОНЬ АТТИЛЫ	17
Глава 3. ЗАДАЧА О ХОДЕ КОНЯ	24
Глава 4. ФЕРЗЬ-ЧАСОВОЙ	38
Глава 5. ЗАДАЧА ГАУССА О ВОСЬМИ ФЕРЗЯХ	46
Глава 6. ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ЛАДЬЯ	58
Глава 7. ТОНКИЕ МАРШРУТЫ КОРОЛЯ	71
Глава 8. СЛОН – БИЛЬЯРДНЫЙ ШАР	79
Глава 9. НЕЗАВИСИМОСТЬ И ДОМИНИРОВАНИЕ	86
Глава 10. ХИТРЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ	100
Глава 11. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕКОРДЫ	111
Глава 12. СИЛА ФИГУР	124
Глава 13. НА НЕОБЫЧНЫХ ДОСКАХ	131
Глава 14. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ШАХМАТЫ	140
Глава 15. ГЕКСАГОНАЛЬНЫЕ ШАХМАТЫ	148
Глава 16. СКАЗОЧНЫЕ ШАХМАТЫ	153
ПОСЛЕСЛОВИЕ	167
ЛИТЕРАТУРА	169

Приложение к журналу «Квант» №2/2010

Библиотечка «Квант» 115

Е.Я.Гик

Математика и шахматы

Редактор *А.Ю.Котова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 104

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 5,5 печ.л. Тираж 3000 экз.

Заказ № 3411.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Сайт: www.chpk.ru.

E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672)6-25-36, факс. 8(499)270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный 8(499) 270-73-59

**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ
СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Смординский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками

34. В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков. Релятивистский мир
35. А.А.Михайлов. Земля и ее вращение
36. А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин. Как превращаются вещества
37. Г.С.Воронов. Штурм термоядерной крепости
38. А.Д.Чернин. Звезды и физика
39. В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев. Удивительная гравитация
40. С.С.Хилькевич. Физика вокруг нас
41. Г.А.Звенигородский. Первые уроки программирования
42. Л.В.Тарасов. Лазеры: действительность и надежды
43. О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов. Международные физические олимпиады школьников
44. Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский. Математика и спорт
45. Л.Б.Окунь. α , β , γ ... Z: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. Я.Е.Гегузин. Пузыри
47. Л.С.Марочник. Свидание с кометой
48. А.Т.Филиппов. Многоликий солитон
49. К.Ю.Богданов. Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. Х.Рачлис. Физика в ванне
52. В.М.Липунов. В мире двойных звезд
53. И.К.Кикоин. Рассказы о физике и физиках
54. Л.С.Понтрягин. Обобщения чисел
55. И.Д.Данилов. Секреты программируемого микрокалькулятора
56. В.М.Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах
57. А.А.Силин. Трение и мы
58. Л.А.Ашкинази. Вакуум для науки и техники
59. А.Д.Чернин. Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. М.Б.Балк, В.Г.Болтянский. Геометрия масс
62. Р.Фейнман. Характер физических законов
63. Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов. Удивительная физика
64. А.Н.Колмогоров. Математика – наука и профессия
65. М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин. Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. Р.Фейнман. КЭД – странная теория света и вещества
67. Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов. Драма идей в познании природы
68. И.Д.Новиков. Как взорвалась Вселенная
69. М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева. Электричество в живых организмах

70. А.Л.Стасенко. Физика полета
71. А.С.Штейнберг. Репортаж из мира сплавов
72. В.Р.Полищук. Как исследуют вещества
73. Л.Кэрролл. Логическая игра
74. А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов. Физика в мире полимеров
75. А.Б.Мигдал. Квантовая физика для больших и маленьких
76. В.С.Гетман. Внуки Солнца
77. Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков. Математические бильярды
78. В.Е.Белонучкин. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. С.Р.Филонович. Судьба классического закона
80. М.П.Бронштейн. Солнечное вещество
81. А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов. Раз задача, два задача...
82. Я.И.Перельман. Знаете ли вы физику?
83. Р.Хонсбергер. Математические изюминки
84. Ю.Р.Носов. Дебют оптоэлектроники
85. Г.Гамов. Приключения мистера Томпкинса
86. И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. А.В.Спивак. Математический праздник
89. Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий. Задачи и не только по физике
90. П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли. Двести интригующих физических задач
91. А.Л.Стасенко. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. В.И.Белотелов, А.К.Звездин. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. А.А.Егоров, Ж.М.Раббот. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. К.Ю.Богданов. Прогулки с физикой
99. П.В.Блиох. Радиоволны на земле и в космосе
100. Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров. Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. А.В.Спивак. Арифметика
103. Я.А.Смординский. Температура (3-е изд.)
104. А.Н.Васильев. История науки в коллекции монет
105. И.Ф.Акулич. Корольевские прогулки

- 106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
- 107. *Г.С.Голицын*. Макро- и микромиры и гармония
- 108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп (2-е изд.)
- 109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2
- 110. *П.Г.Крюков*. Лазер – новый источник света
- 111. *А.Б.Сосинский*. Узлы. Хронология одной математической теории
- 112. *А.П.Пятаков, П.П.Григал*. Лаборатория на коленке
- 113. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
- 114. *С.В.Коновалихин*. Сборник качественных задач по физике

Индекс 70465

35=



Библиотечка КВАНТ



ВЫПУСК

115